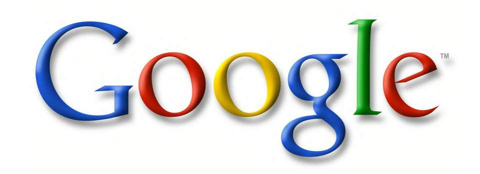
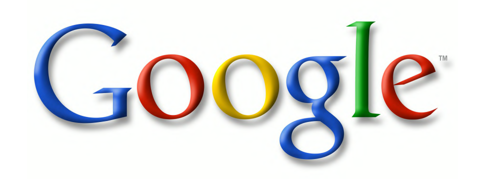




Notes
de
Bibliographie
des
Courbes géométriques.

(Partie complémentaire)

Le présent Recueil, encore à l'état d'avant-projet, est extrait d'un Vocabulaire mathématique en préparation.

Alexander Ziwet

Notes de Bibliographie des Courbes géometriques

par

H. Brocard

Partie complémentaire

Bar-le-Duc
Imprimerie et Lithographie Comte-Jacquet
Facdouel, directeur
1899

Le texte des 192 premières pages a été autographié du 9 mars au 17 avril 1899, et celui des pages restantes du 29 mai au 7 juin.

Préface.

Lorsque j'entrepris un premier essai de Bibliographie des Courbes géométriques, je ne me figurais pas que le Supplément nécessaire dût prendre autant de place que le recueil primitif. Et pourtant, après y avoir donné beaucoup d'attention, je m'aperçois de nouvelles lacunes; sans parler de celles, non moins fâcheuses, qui seront encore remarquées de mes lecteurs.

Je puis donc prévoir qu'il faudrait publier un nouveau Supplément. Cependant, j'estime que, dès à présent, il y aurait les éléments voulus pour un Ouvrage de librairie. On profiterait de l'occasion pour fusionner les paragraphes relatifs à une même courbe; en même temps, on élaguerait certains articles pour les refondre en un seul, de façon à préparer un acheminement vers une nomenclature définitive, dans laquelle les courbes importantes et bien caractérisées n'auraient plus qu'une seule dénomination.

*
* *

Depuis la publication du premier Répertoire, le Concours institué par l'Académie Royale des Sciences de Madrid a pris fin le 31 décembre 1897. Dans son Rapport annuel (Volume de 1899, p. 178) l'Académie a fait connaître qu'elle a reçu trois Mémoires manuscrits dont elle a commencé l'examen.

L'importance que l'Académie Royale des Sciences de Madrid avait donnée au sujet de ce Concours me faisait un devoir de lui communiquer mon travail. C'est ce que je fis

dans les premiers jours de décembre 1897. Il se trouve annoncé dans le volume précité, p. 163.

*
* *

Cette seconde Partie du Répertoire de Bibliographie des Courbes géométriques est, comme l'indique son titre, destinée à combler partiellement les lacunes du premier travail de 1897. L'année 1898 a été employée à réunir les éléments de ce nouveau Recueil, éléments que je dois pour la presque totalité à l'obligeance de nombreux Correspondants, parmi lesquels je me fais un plaisir de signaler MM. Aubry, Buhl, Retali, et Ripert, en leur adressant ici l'expression de ma plus vive reconnaissance.

Je n'aurai garde d'oublier les précieuses contributions que je dois également à MM. Korteweg, Droz-Farny, Fouret, E. Cesàro, Wölffing, Barisien, G. de Longchamps, Haton de la Goupillière, d'Ocagne, Muirhead, Macfarlane, Duran-Loriga, d'Avillez, Espanet, E. Lemoine, H. Bourget, Petit-Bois, G. Teixeira, Ziwet.

Je suis heureux de témoigner aussi mes plus vifs remerciments à MM. P. Tannery, G. Eneström, Gino-Loria, pour les comptes rendus publiés sous leurs signatures respectivement dans le Bulletin des Sciences mathématiques, 1898, pp. 165-167; la Bibliotheca mathematica, 1898, pp. 23-27; et le Bollettino di Bibliografia e Storia delle scienze matematiche, 1898, pp. 55-56; et à MM. P. Mansion et J. Neuberg, pour l'annonce de mon travail dans Mathesis, 1898, p. 32.

Je désire reporter à l'obligeante initiative de mes honorables correspondants tout le mérite que l'on pourra trouver à ce Catalogue. Plus d'une courbe y sera indiquée dont j'ignorais l'existence et que je n'ai pas eu l'occasion de rencontrer dans les ouvrages à ma portée.

Je suis persuadé que, tout incomplet qu'il soit, ce répertoire rendra service aux mathématiciens. Je le confierai avec empressement à ceux d'entre eux qui seront disposés à contribuer à sa vulgarisation.

Liste
des
Abreviations conventionnelles
employées pour désigner les principaux recueils cités dans le cours du texte

---

N. A — Nouvelles Annales de Mathématiques, recueil mensuel paraissant depuis 1842.

N. C. — Nouvelle Correspondance mathématique (de 1874 à 1880)

M. — Mathesis, recueil mensuel paraissant depuis 1881 et qui fait suite à la Nouvelle Correspondance math^que^.

J. E. — Journal de Mathématiques élémentaires, fondé en 1877 par J. Bourget, continué de 1885 jusqu'en 1897 par G. de Longchamps (recueil mensuel)

J. S. — Journal de Mathématiques spéciales (même observation que ci-dessus).

C. R.	Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris (Recueil hebdomadaire)
B. D.	Bulletin des Sciences mathématiques publié depuis 1870 par G. Darboux (Recueil mensuel).
I. M.	Intermédiaire des Mathématiciens, fondé en 1894 par C.-A. Laisant et E. Lemoine (Recueil mensuel).
L. P.	C.-A. Laisant. – Recueil de Problèmes de Mathématiques. – Tome IV. 1893. Géométrie analytique à deux dimensions.
S. M.	Bulletin de la Société mathématique de France (depuis 1872)
A. F.	Association française pour l'avancement des Sciences (depuis 1872)
J. M.	Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par Liouville en 1836.
Z. S.	Zeitschrift f. Math. u. Physik. édité par Schlömilch.
Z.	Zeitschrift d'Hoffmann.

Pour les abréviations qui auraient été omises voir les indications du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques ou la liste publiée en tête de chaque volume de l'Intermédiaire des Mathématiciens.

Notes de Bibliographie des Courbes geometriques.

Partie Complémentaire

Abaque. – Ce nom, à vrai dire, ne désigne pas une courbe unique, mais plutôt la réunion de courbes planes définies, constituant dans le plan un système de coordonnées rectilignes ou curvilignes qui peut servir à déterminer la position de tel ou tel point du plan par un calcul graphique beaucoup plus simple que le calcul analytique correspondant.

L'exposition complète de ce sujet entraînerait à de très grands développements qu'il est impossible de donner ici. On les trouvera dans plusieurs ouvrages spéciaux parmi lesquels il convient de citer :

M. Lévy. – La Statique graphique.

M. d'Ocagne. – La Nomographie. – Théorie générale des abaques.

M. d'Ocagne. — Le calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques.

C. Lallemand. — Les abaques hexagonaux.

Ces ouvrages ont puissamment contribué à faire apprécier, comme elles le méritaient, les méthodes de calcul graphique.

Voir aussi Réseau logarithmique.

Anallagmatique. — L'étymologie est plutôt α privatif, ν euphonique, ἀλλάσσω, changer, ou ἄλλαγμα, changement.

Le nom a été donné aux courbes qui se reproduisent elles-mêmes quand on leur applique la transformation par rayons vecteurs réciproques (Voir Courbes inverses).

$r = f(\theta)$ étant l'équation d'une courbe C, sa transformée C' par rapport au pôle O et avec a pour puissance d'inversion, a pour équation $r = \frac{a}{f(\theta)}$. La courbe est anallagmatique si les deux équations sont identiques.

La puissance d'inversion α peut être négative.

On donne fréquemment le nom d'anallagmatique à une courbe qui se reproduit elle-même, quand dans son équation on remplace les coordonnées par leurs inverses. Ainsi, en coordonnées barycentriques, la cubique représentée par l'équation

$$\gamma\beta^2 + \beta\gamma^2 + \alpha\gamma^2 + \gamma\alpha^2 + \beta\alpha^2 + \alpha\beta^2 + \alpha\beta\gamma = 0$$

est anallagmatique (Voir Cubique anallagmatique).

Angle. — D'après une remarque de J. Plateau (M. 1881, 89 ; J. Neuberg) on peut dire, en un certain sens, que

$$y = \lim \left[a x^{\frac{2m}{2m-1}} \right]_{m=\infty}$$

est l'équation de l'angle des deux droites ayant respectivement pour équations

$$y = ax, \quad y = -ax.$$

Dans le même ordre d'idées, on peut dire que, pour une valeur infinie de m, l'équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2m} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} = 1$$

représente le rectangle formé par les droites qui ont pour équations

$$x = \pm a, \quad y = \pm b.$$

Pareillement, pour $m = \infty$, l'équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2m}{2m+1}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2m}{2m+1}} = 1$$

représente le lozange dont les côtés ont pour équations

$$\pm \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 1.$$

Des remarques analogues ont été exposées dans l'article intitulé : Ligne brisée transcendante.

Anse de panier. — Biffer les mots : ellipse de jardinier.

Apienne. — Nom proposé pour une courbe piriforme, dérivée de la circonférence ayant pour équation

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0$$

par la transformation dite cartésienne semi réciproque, fondée sur les substitutions

$$x = X, \quad yY = a^2.$$

La nouvelle courbe a donc pour équation

$$x^2y^2 - 2a^3y + a^4 = 0.$$

Elle a la forme d'une poire (en grec, ἄπιον) avec deux branches infinies, asymptotes à l'axe des y.

Voir : Cours de Problèmes, t. II, p. 393. (G. de Longchamps).

Arabesques. — On donne le nom général d'arabesques à des courbes que l'on rencontre dans le dessin d'ornement et d'architecture, qui, à l'origine, ont été employées par les Arabes avec le plus grand talent.

L'interdiction absolue de représenter la nature vivante est chez les Musulmans, d'ordre religieux; les artistes ont donc été obligés de se borner à des figures d'ornementation exclusivement géométriques, ce qui pourrait bien avoir contribué chez eux au développement de la géométrie et de l'algèbre.

Les arabesques présentent de nombreux exemples de spires et d'inflexions. Leur forme ne paraît pas avoir été uniquement soumise au caprice de l'artiste. Elle a été souvent le résultat d'une étude réellement géométrique.

L'art moderne a également utilisé les arabesques, sans pourtant qu'on puisse dire qu'il ait surpassé la perfection de leurs inventeurs.

Le tracé des arabesques est généralement rapporté à des axes de symétrie, de sorte que le dessinateur abrège et précise à la fois son travail en n'exécutant qu'une moitié du dessin et reployant celle-ci pour obtenir l'autre moitié.

On réalise aussi beaucoup de rapidité en se servant de patrons perforés à coups d'épingle.

Pour la bibliographie du sujet, voir les ouvrages spéciaux de technologie, ainsi que l'article intitulé Entrelacs.

Arguésienne. — L'arguésienne d'une courbe est le lieu des points inverses de cette courbe par rapport à un triangle fixe.

Étant donnés un triangle de référence ABC et un point M de son plan, on démontre, en Géométrie du triangle, que les symétriques des droites AM, BM, CM, prises respectivement par rapport aux bissectrices des angles A, B, C, concourent en un même point M' que l'on nomme l'inverse (ou le conjugué isogonal) du point M. Ainsi, le point de Lemoine, K, est l'inverse du barycentre G (Voir Cercle de Lemoine); les deux points de Brocard (Voir Cercle de Brocard) sont inverses l'un de l'autre.

La transformation arguésienne consiste à substituer à chaque point, d'une courbe donnée son inverse.

En coordonnées trilinéaires normales, α, β, γ étant les coordonnées d'un point M, celles de son inverse M' sont $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$; en sorte que, si $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ est l'équation de la courbe donnée, celle de son arguésienne (ou inverse) est $f\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right) = 0$ ou $f(\beta\gamma, \alpha\gamma, \alpha\beta) = 0$.

En coordonnées barycentriques, l'inverse d'un point (X, Y, Z) a pour coordonnées $\left(\frac{a^2}{\alpha}, \frac{b^2}{\beta}, \frac{c^2}{\gamma}\right)$, a, b, c étant les longueurs des côtés opposés à A, B, C, en sorte que, si $f(X, Y, Z) = 0$ est l'équation d'une courbe, celle son arguésienne est $f(a^2\beta\gamma, b^2\alpha\gamma, c^2\alpha\beta) = 0$.

Renseignement bibliographique. — La transformation arguésienne a été étudiée par A. Cayley depuis 1849 (Journal de Liouville, 1849) et auparavant par Steiner et Magnus.

Astroïde. — Ajoutez, à la bibliographie :
N. A. 1898, 153-155. Haton de la Goupillière.

Pour la démonstration de la propriété de la tangente, énoncée au 1[er] Supplément, voir I. M. 1898, 68-69. V. Retali.

L'antipodaire centrale, qualifiée du 22[e] degré (Ibid) est seulement du 8[e] degré et de la 8[e] classe (I. M. 1896, 187).

La dénomination d'astroïde paraît devoir être préférée à celle d'hypocycloïde à quatre rebroussements, car la courbe, outre les quatre rebroussements réels, en a deux imaginaires conjugués, aux points cycliques de son plan.

Une observation semblable s'applique à la développée de l'ellipse et à la développée de l'hyperbole, qui, toutes deux, ont six rebroussements.

Autopodaire. — Ligne courbe qui est à elle-même sa propre podaire par rapport à

un point donné de son plan.

Exemple : La spirale logarithmique est la seule courbe qui soit sa propre podaire ou son autopodaire. (Journal de Mathématiques (ou de Liouville) (2) XI, 329. Haton de la Goupillière).

Cet exemple est particulièrement intéressant, parce que sa démonstration est la seule application des équations simultanées aux différences mêlées.

Axe hydraulique. — Ligne qui intervient dans la théorie des eaux courantes (canaux découverts).

Axe longitudinal. — Voir, ci-après, l'article intitulé : Fibre moyenne.

Barycentrique. — Au sujet des courbes barycentriques, voir une Note du Journal de l'École polytechnique, 43e cahier, XXVI, 123-155 (Haton de la Goupillière). Ce nom avait été adopté déjà par l'auteur de ce travail.

Brachistochrone. — Ce mot doit s'écrire avec un i et non avec un y, parce qu'il dérive, non de βραχύς, mais du superlatif βράχιστος.

Bibliographie complémentaire. — E. Vicaire. — Mém. sur les propr. comm. à toutes les courbes qui rempl. une cert. condit. de min. ou de max. (Mémoires présentés par divers Savants à l'Acad. des Sciences. (2) XXXI. 1894)

Haton de la Goupillière. — Problème inverse des brachistochrones (Même recueil. (2) XXVIII. 1-42.

Cadran. — Pour l'étymologie, il vaut peut-être mieux dériver cadran du latin quadrans. D'ailleurs, cadran est la même chose que quadrant, et signifie quart de cercle, en raison de la forme des cadrans solaires portatifs employés le plus fréquemment au moyen-âge.

Voir : P. Tannery : Le Traité du quadrant de Maître Robert Anglès (Montpellier, XIIIe siècle), texte latin et ancienne traduction grecque, inséré au tome XXXV (2) des Notices et Extraits des Manuscrits de la Bibliothèque nationale (Paris, 1897).

Cappa. — Le cappa et la strophoïde sont des cas particuliers de la courbe d'ombre de l'hélicoïde gauche, étudiée par Poncelet (A. Aubry).

Aire de la courbe. — L'aire comprise entre le Cappa et ses deux asymptotes est équivalente à l'aire du cercle ayant pour diamètre la distance des deux asymptotes. Elle a donc pour valeur πa^2.

Propriété de la tangente. — La perpendiculaire en M au rayon vecteur OM rencontre Oy en F. En ce point, on mène à MF la perpendiculaire FT qui rencontre Ox en T. TM est la tangente en M. En effet, l'équation différentielle de la courbe ainsi définie est

$$2xy^2p - y^3 + px^3 = 0,$$

p désignant $\frac{dy}{dx}$. On a donc

$$p = \frac{y^3}{2xy^2 + x^3}.$$

Posant $y = ux$, on a

$$\frac{2u^2+1}{u(u^2+1)}du = -\frac{dx}{x},$$

d'où

$$u\sqrt{1+u^2} = \frac{a}{x},$$

et

$$r = a \operatorname{cotang} \theta.$$

Cardioïde. — La cardioïde peut être définie comme inverse de la parabole par rapport à son foyer (Voir Courbe inverse).

Elle a trois rebroussements, un réel, et deux imaginaires conjugués, qui sont les points cycliques ou ombilics du plan.

La cardioïde représentée par l'équation polaire

$$r = 2a\cos^2\frac{\theta}{2}$$

a pour surface

$$U = \frac{3\pi a^2}{2}$$

et pour périmètre

$$P = 8a.$$

La cardioïde a été rencontrée par Ozanam qui lui avait donné le nom de cycloïde géométrique (Voir Dictionnaire mathématique ou idée générale des mathématiques. Amsterdam. 1691. p. 102). Cette courbe, dont l'équation est

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 2ax^2y + ay^3 - a^2x^2 = 0,$$

est identique à la cardioïde.

Au IIe Supplément, il a été dit que la découverte de la cardioïde paraissait devoir être attribuée à Koërsura. Le nom véritable est Koërsma, d'après G. Eneström (I. M. 1898, p. 200).

Pour la bibliographie, on peut ajouter les indications suivantes:

Weill. — Note sur la cardioïde et le limaçon de

Pascal (N. A. 1881, 160-171).

Différents Mémoires, programmes scolaires, etc. de Schweder, Holzmüller, Plagge, Weyr, Zahradnik, Ameseder, (Z. 1884, 271, 366, 598).

Wolstenholme. – Sur le lieu du point de concours de deux tangentes rectangulaires à la cardioïde (Proceed. of the London Math. Soc. t. IV. 1871-1873) Voir à ce sujet N. C. t. II. 58, 123, 231 (1876).

V. Jeřábek. Sur la relation perspective d'un triangle quelconque avec un triangle équilatéral. Archiv math. a fysiky. Prague. I. 1875-1876, pp. 225-234 (B. D. XII. 2e Ptie p. 173, 1877).

K. Zahradnik. – Théorie de la cardioïde (Archiv etc. Ibid. pp. 25-40. Voir le résumé de ce travail (B. D. ibid. p. 170): la cardioïde est une courbe unicursale, de classe 3. Sa développée est une autre cardioïde, dont les dimensions sont le tiers de celles de la première.

A. Salaba. – Addition au Mémoire précédent (mêmes références).

Note. – Le mémoire précité de K. Zahradnik a été traduit en allemand et publié dans les Archives de Grunert (t. LIX, 1876, pp. 337-350).

Carte géographique. – Étant données des lignes tracées sur une surface quelconque, on peut toujours et d'une infinité de manières les représenter point par point sur un plan. On a alors la carte géographique des lignes considérées.

Les cartes les plus remarquables sont celles où les angles sont conservés, et pour cela il faut et il suffit que l'élément $d\sigma$ de l'arc de la courbe primitive soit proportionnel à l'élément d'arc ds qui, sur la carte, correspond au premier. En effet, à un triangle infiniment petit tracé sur la surface considérée correspond alors sur la carte un triangle semblable. Les deux triangles en question ont donc les mêmes angles.

Le problème, dans toute sa généralité, a été étudié analytiquement par Jacobi (Vorlesungen über Dynamik). Voir aussi les Traités d'Analyse de Laurent (t. VII, p. 163) et de Picard (t. I, p. 452).

Une application pratique des théories générales consiste à faire la carte de la Terre supposée

sphérique, ou même ellipsoïdale (Jacobi; loc. cit.) La transformation ci-dessus définie qui conserve les angles, donne des lignes droites pour les méridiens, les parallèles et les loxodromies (H. Laurent, loc. cit.) C'est le système des cartes marines de Mercator.

On sait que la projection stéréographique donne aussi des cartes d'une sphère où les angles sont conservés. C'est alors le cas d'une transformation par rayons vecteurs réciproques, dont le pôle est un point de la sphère.

On peut aussi se proposer de faire la carte d'une surface de telle façon que les aires soient conservées. Dans le cas de la sphère, on a alors la Carte de Lorgna. En voici le principe. Si une circonférence engendre une sphère en tournant autour d'un de ses diamètres AB, un arc AC de cette circonférence engendre une calotte dont la surface est égale à celle d'un cercle ayant la corde AC pour rayon. En généralisant cette notion, si A est le pôle terrestre, le parallèle qui sur la Terre passe par C est représenté sur la carte par un cercle de rayon AC. Les parallèles sont donc représentés par des cercles concentriques et les méridiens par les rayons de ces cercles.

Cartésienne. – Quartique bicuspidale, c'est-à-dire pourvue de deux points de rebroussement, dans le cas où ces deux points sont les points cycliques.

Ces courbes ont toujours trois foyers (réels ou imaginaires) situés en ligne droite (un foyer au moins étant réel).

Quand les trois foyers sont réels, la cartésienne devient l'ovale de Descartes (voir ce mot).

Si une droite quelconque rencontre une cartésienne en quatre points, la somme de leurs distances à un foyer est constante (voir G. Salmon (Courbes planes) p. 353-355 (1884).

Caustique. – La dénomination de caustique, ou brûlante, a été proposée par Tchirnhaus (Chasles; Aperçu historique; Histoire de l'Acad. des Sc. pour 1703, p. 69-73; Mém. (idem) p. 183-199. Carré).

Le nom de caustiques rappelle donc l'origine physique de ces courbes, mais leur définition géométrique est l'enveloppe des rayons réfléchis

ou réfractés par une courbe ou par une surface donnée et issus d'un point donné (qui peut être rejeté à l'infini, auquel cas les rayons sont parallèles).

Étant donnés une courbe C et un point O on sait que le rayon réfléchi d'un vecteur OM, M étant un point de la courbe, est le rayon MM' qui fait avec la normale MN un angle M'MN égal à OMN. L'enveloppe des rayons MM' est la caustique par réflexion (ou catacaustique) de la courbe C par rapport au pôle ou point lumineux O. — Si le rayon MM' est défini par la relation $\frac{\sin OMN}{\sin M'MN} = k$, (la lettre k étant la constante que l'on appelle en Physique indice de réfraction), l'enveloppe des rayons MM' réfractés par la courbe C est la caustique par réfraction (ou diacaustique) de la courbe C par rapport au pôle ou point lumineux O.

Aux indications bibliographiques déjà données, on peut ajouter: Mém. de l'Ac. des Sc. pour 1703. et ensuite: O. Terquem. Sur les lignes aplanétiques, lemniscates, caustiques, N. A. 1845, pp. 423-431 (voir aussi N. A. 1847, pp. 189-194).

A. Cayley. Mém. sur les caustiques (Phil. trans. London, t. CXLVII, 1857, pp. 273-312, et t. CLVII, 1867, 9 pages.)

E. Habich. Sur un système particulier de coordonnées; application aux caustiques (Annali di Matematica. t. II. 1868-1869).

Weyr. Identité des caustiques avec les courbes podaires (Z. S. XIV. 1869).

Childe. Surface des rayons réfractés (Quarterly Journal, etc. t. XIV, 1877, pp. 106-123 et 209-217)

O. Kessler. Étude cinématique des caustiques (Z. S. t. XXIII. 1878. pp. 1-34).

<u>Cayleyenne</u>. — La cayleyenne (de trois courbes) est l'enveloppe des droites telles que leurs pôles tangentiels par rapport à trois courbes quelconques données soient en ligne droite. Cette courbe a été étudiée pour la première fois par A. Cayley, dont elle a reçu le nom.

Les équations tangentielles des trois courbes supposées de classes m, n, p respectivement, étant

$$f(U, V, R) = 0, \quad \varphi(U, V, R) = 0, \quad \psi(U, V, R) = 0,$$

l'équation de la cayleyenne, dont la classe maximum

2

est $(m-1)(n-1)(p-1)$, peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} f'_U U & f'_V V & f'_R R \\ \varphi'_U & \varphi'_V & \varphi'_R \\ \psi'_U & \psi'_V & \psi'_R \end{vmatrix} = 0.$$

La cayleyenne est tangente à toutes les tangentes doubles des trois courbes, ainsi que de toute courbe faisant partie du réseau tangentiel

$$F = \lambda f + \mu\varphi + \nu\psi,$$

dépendant des trois courbes données.

Lorsque les courbes f, φ, ψ, sont de 2e classe (ou des coniques) les droites doubles du réseau F sont les droites de jonction des systèmes de deux points faisant partie du réseau. La cayleyenne est alors de 3e classe.

Elle se réduit à une conique homotangente (voir ce mot) si f, φ, ψ sont elles-mêmes des coniques homotangentes.

La courbe corrélative de la Cayleyenne est la Jacobienne (voir ce mot).

Pour les cayleyennes et l'étude des réseaux tangentiels en général, voir les Traités de Géométrie analytique, et G. Salmon (Courbes planes. 1884, p. 215 et passim).

On a désigné aussi du nom de cayleyenne l'enveloppe des droites qui forment les coniques polaires des points de la hessienne d'une courbe C^m de degré m. Cette enveloppe s'appelle encore Steiner-hessienne. Elle a une correspondance (1.1) avec la steinérienne et la hessienne et par suite est du même genre; ses caractéristiques sont

$$m' = 3(m-2)(5m-11).$$
$$n' = 3(m-1)(m-2).$$
$$\delta' = \tfrac{9}{2}(m-2)(5m-13)(5m^2-19m+16)$$
$$x' = 18(m-2)(2m-5)$$
$$\tau' = \tfrac{9}{2}(m-2)^2(m^2-2m-1)$$
$$\iota' = 0.$$

Voir les mots Steinérienne, Steiner-hessienne, pippienne.

<u>Cayleyenne de cubique</u>. — Enveloppe de la droite qui joint deux points correspondants d'une cubique non singulière, c'est-à-dire deux points ayant même tangentiel.

La droite qui unit deux points correspondants

est divisée harmoniquement par le troisième point de la cubique et par le point de contact avec la cayleyenne (théorème de Cayley)

Bibliographie: Cremona, Curve piane, art. 133 et suiv.; Durège, Curven 3 Ordn. pp. 264–273; Hesse, J. de Crelle, t. XXXVIII, p. 241; Cayley, Phil. Trans. t. CXLVII, p. 415. 1857.

Cercle. – Aire limitée par une circonférence (Voir ce mot). Dans le langage usuel, le mot cercle est employé pour désigner la circonférence elle-même, c'est-à-dire la courbe.

Pour les propriétés élémentaires du cercle, qui sont en nombre indéfini, voir tous les traités de Géométrie.

Le cercle est une ellipse (voir ce mot) dont les deux axes sont égaux, d'où il résulte que tous les diamètres deviennent égaux et peuvent être considérés comme des axes, deux diamètres rectangulaires quelconques étant conjugués.

Une conique (voir ce mot) est un cercle, si, dans son équation générale, on a $A = C$, $B = A\cos\theta$, θ étant l'angle des axes coordonnés. L'équation générale des cercles du plan est donc

$$x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Si les axes sont rectangulaires, on a $\cos\theta = 0$. L'équation réduite est alors

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

a étant le rayon

L'équation générale du cercle en coordonnées polaires est

$$r^2 - 2(a\cos\omega + b\sin\omega)r + c = 0.$$

Elle se réduit, quand le cercle passe par le pôle, à

$$r = a\cos\omega + b\sin\omega.$$

L'équation générale du cercle en coordonnées trilinéaires normales est

$$a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta + (a\alpha + b\beta + c\gamma)(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma) = 0.$$

En coordonnées barycentriques, elle est

$$a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta + (\alpha + \beta + \gamma)(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma) = 0.$$

Ces équations expriment que tout cercle du plan est homothétique au cercle circonscrit (au triangle de référence) c'est-à-dire que tout cercle coupe la droite de l'infini aux mêmes points imaginaires (les points cycliques).

En d'autres termes, le cercle a pour caractéristiques d'être du degré 2, de la classe 2, et de passer par les points cycliques (ou ombilics du plan).

La Géométrie du triangle considère aujourd'hui un grand nombre de cercles remarquables, dont la plupart ont reçu des noms particuliers, en raison de l'importance de leurs propriétés et du développement des travaux de géométrie auxquels leur étude a donné lieu depuis une vingtaine d'années.

Cercle bitangent. — Voir courbe bitangente. — Plucker a fait une application curieuse de la notion du cercle bitangent, dans la célèbre définition qu'il a donnée des foyers des courbes en général : « On appelle foyer d'une courbe le centre de tout cercle de rayon nul bitangent à la courbe ; la droite de jonction des points de contact est la directrice correspondante (au foyer considéré).

Cercle circonscrit. — L'équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle représenté par l'équation

$$xy\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)=0$$

est

$$x^2+2xy\cos\theta+y^2-ax-by=0,$$

θ étant l'angle des axes, ou des droites $x=0$ et $y=0$. Son centre est au point

$$x=\frac{a-b\cos\theta}{2\sin^2\theta},\quad y=\frac{b-a\cos\theta}{2\sin^2\theta}$$

et son rayon est

$$r=\frac{1}{2\sin\theta}\sqrt{a^2-2ab\cos\theta+b^2}.$$

Dans le système de coordonnées barycentriques, le centre a pour coordonnées

(O) $\quad a\cos A,\quad b\cos B,\quad c\cos C.$

Il est donc l'inverse (voir Arguésienne) de l'orthocentre, dont les coordonnées sont

(H) $\quad \frac{a}{\cos A},\ \frac{b}{\cos B},\ \frac{c}{\cos C}.$

Le cercle circonscrit à un triangle ABC passe par une infinité de points remarquables parmi lesquels il convient de citer

1°. Les trois symétriques de l'orthocentre H par rapport aux côtés (voir cercle latéral);

2°. Les six milieux des distances II_a, II_b, II_c, I_bI_c, I_aI_b, I_aI_c, de deux quelconques des centres des quatre cercles inscrit et ex-inscrits;

3°. Le point de Steiner, intersection du cercle circonscrit et de la première ellipse de Steiner (voir

ce mot) et qui se trouve sur les trois cercles passant par un sommet et les points symétriques des deux autres par rapport au barycentre G; ses coordonnées barycentriques sont

$$\frac{1}{b^2-c^2}, \frac{1}{c^2-a^2}, \frac{1}{a^2-b^2}$$

4°. Le point de Tarry, diamétralement opposé au point de Steiner; ses coordonnées barycentriques sont

$$\frac{1}{b^4+c^4-a^2(b^2+c^2)}, \frac{1}{c^4+a^4-b^2(c^2+a^2)}, \frac{1}{a^4+b^4-c^2(a^2+b^2)}.$$

Le cercle complémentaire du cercle circonscrit est le cercle d'Euler (Voir ce mot).

<u>Cercle complémentaire</u> (Voir Courbe complémentaire). — En géométrie du triangle, les cercles complémentaires les plus intéressants à considérer sont

1°. le cercle d'Euler, complémentaire du cercle circonscrit, et dont l'équation est, par suite, en coordonnées barycentriques

$$\Sigma\, a^2(\alpha+\gamma-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)=0.$$

2°. le cercle polaire conjugué, complémentaire du cercle de Longchamps.

Par réciprocité, le cercle dont un cercle donné est le complémentaire est dit son cercle anticomplémentaire. Ainsi, le cercle circonscrit est l'anticomplémentaire du cercle d'Euler; l'anticomplémentaire du cercle circonscrit est le cercle circonscrit au triangle complémentaire, c'est-à-dire formé par les parallèles aux côtés menées par les sommets.

<u>Cercle conjugué</u>, ou cercle conjugué à une conique. — Il y a, en général, dans le plan d'une conique, quatre points tels que les coniques conjuguées à celle-ci par rapport à ces points sont des cercles (réels ou imaginaires de la première ou de la deuxième espèce); les centres (réels ou non) de ces cercles sont sur les axes de la conique donnée et équidistants du centre.

Les cercles conjugués à l'hyperbole équilatère

$$x^2-y^2=a^2$$

ont pour équation

$$x^2+y^2=\pm a^2.$$

Le cercle conjugué au cercle réel

$$x^2+y^2=a^2$$

est le cercle imaginaire

$$x^2+y^2=-a^2.$$

Dans le cas de la parabole, il y a un seul cercle, imaginaire de la première espèce, conjugué à la

courbe par rapport au point symétrique du sommet relativement au foyer.

Voir Conique conjuguée.

__Cercle d'Apollonius.__ — Le cercle ayant pour diamètre $A'A''$ est représenté en coordonnées barycentriques par l'équation

$$(b^2-c^2)\sum a^2\beta\gamma + a^2(c^2\beta - b^2\gamma)\sum\alpha = 0$$

ou

$$a^2c^2\beta^2 - a^2b^2\gamma^2 + b^2(c^2+a^2-b^2)\alpha\gamma + c^2(a^2+b^2-c^2)\alpha\beta = 0.$$

Son centre est au point $(0, b^2, -c^2)$.

Les trois centres sont sur la droite de Lemoine

$$\frac{\alpha}{a^2} + \frac{\beta}{b^2} + \frac{\gamma}{c^2} = 0.$$

Les trois cercles coupent orthogonalement le cercle ABC. Ils ont un même axe radical qui est le diamètre OK du cercle de Brocard, ou la droite de Brocard, représentée par l'équation

$$\frac{b^2-c^2}{a^2}\alpha + \frac{c^2-a^2}{b^2}\beta + \frac{a^2-b^2}{c^2}\gamma = 0.$$

Cette droite passe donc par les deux points communs aux trois cercles, c'est-à-dire par les deux centres isodynamiques V, W. En outre, le cercle décrit sur VW comme diamètre passe par les deux points de Brocard, Ω, Ω'.

Enfin, les cordes communes aux cercles d'Apollonius et au cercle circonscrit sont les symédianes.

A la bibliographie, ajouter : M. 1885, p. 204 (J. Neuberg).

__Cercle de Brisse.__ — Cercle dont la notion se rencontre dans l'étude géométrique du mouvement d'une figure dans son plan.

__Cercle de convergence.__ — Le cercle de convergence d'une série est un cercle ayant en général l'origine pour centre et qui comprend tous les points analytiques dont les affixes ont des valeurs pour lesquelles la série considérée est convergente. Celle-ci est alors divergente pour tous les autres points du plan.

Ainsi la série

$$\frac{z}{1^2} + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^2} + \cdots,$$

lorsque z est réel, est convergente pour $z \leqq 1$. On en conclut facilement que lorsque z est de la forme $x+iy$ $(i=\sqrt{-1})$ elle est convergente pour $\sqrt{x^2+y^2} \leqq 1$, et l'on dit alors que la série considérée admet le cercle $x^2+y^2=1$ pour cercle de

convergence.

Une série peut être convergente, non seulement à l'intérieur de son cercle de convergence, mais encore sur ce cercle. Telle est la série qui vient d'être donnée en exemple. Au contraire, la série

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

bien qu'elle ait même cercle de convergence que la précédente, n'est pas convergente sur celui-ci.

Pour plus de détails, voir les Traités d'Analyse.

<u>Cercle de Hart</u>. — Cercle dont celui d'Euler est un cas particulier.

<u>Cercle de Joachimsthal</u>. — Cercle dépendant d'une conique et d'un point et résultant du théorème suivant, dû à Joachimsthal :

Les pieds B, C, D de trois des normales (réelles ou imaginaires) menées d'un point M à une conique à centre, et le point A' diamétralement opposé au pied A de la quatrième, appartiennent à une même circonférence.

Par suite, à tout point M du plan correspondent, par rapport à une conique donnée (à centre), quatre cercles de Joachimsthal ($A'BCD$, $AB'CD$, $ABC'D$, $ABCD'$).

Le cercle $A'BCD$ passe par un cinquième point remarquable, la projection du centre de la conique sur la tangente en A' (G. de Longchamps; E. Laguerre).

α, β étant les coordonnées du point M, et $x_1 y_1$ celles du point A de la conique

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1,$$

le cercle $A'BCD$ a pour équation (E. Laguerre)

$$x^2 + y^2 + x x_1 + y y_1 = h\left(\frac{\alpha x_1}{A} + \frac{\beta y_1}{B} - 1\right),$$

h désignant la valeur commune des deux quantités

$$\frac{A\alpha}{x_1} + B, \quad \frac{B\beta}{y_1} + A.$$

Dans le cas de la parabole $y^2 = 2px$, et du point $M(\alpha, \beta)$ un des pieds (A, par exemple) est à l'infini (sur la parallèle à l'axe). Son point diamétralement opposé est le sommet O, et le théorème s'énonce ainsi :

Les pieds des trois normales menées d'un point M à une parabole et le sommet de cette parabole appartiennent à une même circonférence, dont

l'équation est

$$x^2+y^2 - \frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+4p^2}{2p}x + \frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{4p^2}y = 0.$$

Ainsi, dans le cas de la parabole, il n'y a plus qu'un cercle de Joachimsthal.

Cercle de Mac-Cay. — Les cercles ainsi nommés, sont au nombre de trois. Ils passent par le barycentre G et ont leurs centres aux points de rencontre des médiatrices des côtés a, b, c du triangle avec les droites qui joignent les sommets A, B, C au point diamétralement opposé au point de Tarry (voir cercle circonscrit) dans l'hyperbole de Kiepert.

L'équation barycentrique du cercle C_A correspondant au sommet A est

$$3\Sigma a^2\beta\gamma - [(b^2+c^2-a^2)\alpha + a^2(\beta+\gamma)]\Sigma\alpha = 0,$$

ou

$$(b^2+c^2-a^2)\alpha^2 + a\beta^2 + a\gamma^2 - a^2\beta\gamma + (c^2-2b^2)\alpha\gamma + (b^2-2c^2)\alpha\beta = 0.$$

Parmi les nombreuses propriétés de ces cercles, nous mentionnerons les suivantes :

1°. Si l'on construit sur les trois côtés de ABC, pris comme côtés homologues, trois figures semblables, on peut trouver, dans ces figures, une infinité de systèmes de trois points homologues M_a, M_b, M_c en ligne droite. Les lieux de ces points sont les trois cercles C_A, C_B, C_C de Mac-Cay.

2°. Les sommets du premier triangle de Brocard sont respectivement les polaires des côtés de ABC par rapport aux trois cercles de Mac-Cay.

3°. Les côtés du second triangle de Brocard sont les axes radicaux du cercle de Brocard et des trois cercles de Mac-Cay.

Cercle de Malfatti. — Dénomination proposée pour les trois cercles qui résolvent le problème de Malfatti : « Inscrire à un triangle ABC le système de trois cercles tangents entre eux et à deux côtés du triangle. »

Steiner a donné de ce problème la solution suivante : I désignant le centre du cercle inscrit au triangle donné ABC, on inscrit un cercle dans chacun des triangles IBC, IAC, IAB ; on mène les secondes tangentes communes intérieures à ces trois cercles pris deux à deux. On obtient ainsi trois triangles ayant chacun pour côtés une de ces tangentes et deux côtés du triangle ABC. Les cercles inscrits dans ces nouveaux triangles sont les cercles demandés.

Pour la bibliographie de ce problème, voir J. Casey, A Sequel to Euclid; E. Catalan, Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire; Desboves, Questions de Géométrie; Rouché et de Comberousse, Traité de Géométrie; etc.

<u>Cercle des cinq points.</u> — Voir cercle des sept points.

<u>Cercle des hauteurs.</u> — Cercle ayant pour centre l'orthocentre H (point de concours des hauteurs AA', BB', CC' d'un triangle ABC) et pour rayon la valeur commune $\sqrt{AH.HA'} = \sqrt{BH.HB'} = \sqrt{CH.HC'}$ des moyennes proportionnelles des segments entre lesquels chaque hauteur est divisée.

Addition. — Le cercle (imaginaire) conjugué au cercle des hauteurs du triangle ABC est conjugué (dans l'acception ordinaire du mot) au triangle ABC.

<u>Cercle de Neuberg.</u> — Parmi les nombreuses propriétés des cercles de Neuberg N_a, N_b, N_c, nous mentionnerons les suivantes :

1°. Si sur chacun des côtés du triangle ABC, on construit des triangles ayant même angle de Brocard que ABC, les sommets libres décrivent les cercles de Neuberg.

2°. Si sur chacun des côtés de ABC, pris comme côtés homologues, on construit des figures semblables, on peut trouver, dans ces figures, une infinité de systèmes de trois points M_a, M_b, M_c, tels que les droites AM_a, BM_b, CM_c soient parallèles. Les lieux des points M_a, M_b, M_c sont les trois cercles N_a, N_b, N_c de Neuberg.

3°. Le centre radical des trois cercles de Neuberg est le point $\left(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}\right)$ réciproque du point de Lemoine.

<u>Cercle des inflexions.</u> — Pour la géométrie de ce cercle, voir : E. Dewulf : Théorème de Cinématique (N. A. 1883, pp. 297-300.

<u>Cercle des neuf points.</u> — Cercle des neuf points est un nom de début, qui s'explique par la première propriété trouvée, qui a pu lui servir de définition ; mais il a tout juste la valeur des noms de cercle des cinq points ou de cercle des sept points. Cela résulte de premiers tâtonnements qui ne peuvent que détourner l'attention et laisser préjuger aux chercheurs que le nombre spécifié de points est immuable. L'événement contredit constamment la dénomination proposée. C'est ce qui est

arrive et doit arriver nécessairement à toutes les courbes dites de n points. On a donc voulu remédier à cette imperfection en proposant d'autres dénominations rappelant les propriétés les plus saillantes de ces courbes ou les noms de leurs inventeurs, nonobstant les inconvénients qui pouvaient en résulter et qui se sont produits dans la suite. Il est certain que l'existence de plusieurs dénominations pour un même cercle (comme cela se présente pour le cercle des neuf points et pour le cercle orthoptique), et pour d'autres courbes, est tout à fait contraire à l'esprit scientifique; tous les mathématiciens sont d'accord sur ce point pour désirer que l'on arrive le plus tôt possible à préciser d'une façon définitive la nomenclature géométrique. Il est à espérer que la publication d'un Répertoire bibliographique du genre du présent travail sera un acheminement vers la réalisation de ce voeu.

Le théorème des neuf points du triangle situés sur un même cercle a été énoncé par Euler, et il paraît juste d'attribuer son nom à ce cercle; mais la priorité même du cercle peut fort bien ne pas lui appartenir, ainsi que cela résulte de l'étude historique publiée par J.-S. MacKay, intitulée: History of the Nine point Circle; 39 pages, 19 figures (Proceed. of the Edinb. math. Soc. XI. 1892 1893).

Pour la nomenclature de 25, 31 et même 43 points qui se trouvent sur ce cercle, voir I. M. 1898, 208-212.

Il est évident que le nombre de points remarquables et définis géométriquement ne fera qu'augmenter.

Pour un triangle représenté par l'équation

$$xy\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)=0,$$

θ étant l'angle des axes, le cercle d'Euler a pour équation cartésienne

$$4(x^2+y^2+2xy\cos\theta)-2(a+2b\cos\theta)x-2(b+2a\cos\theta)y+ab\cos\theta=0.$$

Son équation en coordonnées barycentriques est

$$\Sigma(b^2+c^2-a^2)\alpha^2-2\Sigma a^2\beta\gamma=0$$

Son centre E a pour coordonnées

$$a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2 \quad \text{ou} \quad b\cos B+c\cos C, \text{ etc.}$$

La droite OEH est dite droite d'Euler; son équation est

$$\Sigma(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)\alpha=0.$$

Cette droite passe par plusieurs points remarquables, notamment par le barycentre G et par le centre du Cercle de Longchamps (Voir ce mot).

Cercle des sept points. — Autre nom proposé pour le cercle primitivement des cinq points. (Voir Cercle de Brocard).

Toutes les remarques faites ci-dessus au sujet du cercle des neuf points s'appliquent avec plus de force encore aux cercles des cinq, des sept, des n points. Ces noms de hasard ne peuvent avoir qu'une existence précaire.

Cercle directeur. — On désigne aussi de ce nom les cercles décrits de chacun des foyers de l'ellipse comme centre avec le grand axe de l'ellipse pour rayon (Briot et Bouquet, Géométrie analytique).

Cercle focal. — On a parfois désigné de ce nom le cercle ayant pour diamètre la distance des deux foyers d'une conique à centre, ou la distance focale.

Cercle géodésique. — Courbe tracée sur une surface et dont les propriétés sont analogues à celles de la circonférence dans le plan.

Un cercle géodésique est une courbe dont la courbure tangentielle est constante. C'est aussi une ligne fermée qui, sur la surface, a un périmètre minimum parmi toutes les figures de même aire.

On peut d'ailleurs définir le cercle géodésique comme le lieu des points M d'une surface dont la distance géodésique à un point fixe O de la surface est constante. O est le centre de la figure ; OM en est le rayon géodésique. La tangente en un point M du cercle géodésique est perpendiculaire sur la géodésique OM.

En battant sur la surface un cordeau de longueur constante fixé à un point O de la surface, le lieu de ses extrémités M sera un cercle géodésique.

Cercle orthocentroïdal. — En coordonnées barycentriques, ce cercle a pour équation

$$\Sigma (b^2+c^2-a^2)\alpha^2 - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

Son centre a pour coordonnées

$$a^2(a^2+b^2-c^2)-(b^2-c^2)^2, \text{ etc.}$$

Cercle orthoptique. — On appelle parfois le cercle de Monge cercle orthoptique

(ὀρθός, droit, ὀπτικός, visuel) pour exprimer que d'un quelconque de ses points, on voit une conique à centre (ellipse ou hyperbole) sous un angle droit. On lui a donné aussi les noms de cercle directeur et même de cercle diagonal. Ces dénominations semblent moins justifiées; elles exposent à confusion; il serait bon que l'on fût d'accord sur une désignation unique et définitive.

<u>Cercle imaginaire</u>. — Cercle conjugué à un cercle réel par rapport à son centre; il est aussi le cercle complémentaire d'un cercle réel.

L'intersection, par un plan α, du cône isotrope d'un point P est un cercle imaginaire dont le cercle (réel) conjugué a son centre en la projection orthogonale P' de P sur le plan α et dont le rayon est PP' (V. Retali).

Les polaires d'un point par rapport à deux cercles conjugués sont symétriques par rapport à leur centre commun, etc. Voir Möbius, Ueber imaginäre Kreise (Berichte der K. Sächs. Gesell. d. Wissensch. 1853); Chasles (Géom. supér. ch. XXIII). V. Retali, Sulle coniche conjugate (Mem. della R. Acc. di Bologna. t. VI (4) pp. 194 et suiv.); Wiener (Lehrbuch der D. Geom. t. II, p. 119).

Si K est un cercle réel de centre O

$$x^2+y^2=a^2$$

et K_1 son cercle conjugué complémentaire

$$x^2+y^2=-a^2,$$

les coniques passant par O et bitangentes à K sont des ellipses; les coniques passant par O et bitangentes à K_1 sont des hyperboles, ou des paraboles, suivant que la corde de contact coupe le cercle réel K en deux points imaginaires, coïncidants ou distincts (M. 1897, p. 126. V. Retali).

<u>Cercle inscrit</u>. — Cercle tangent intérieurement aux trois côtés d'un triangle ABC. Son centre I est le point de concours des bissectrices; ses coordonnées normales sont $(1, 1, 1)$ et ses coordonnées barycentriques (a, b, c).

Son rayon est $\frac{S}{p}$, S étant l'aire du triangle et $2p$ son périmètre ($2p=a+b+c$).

En coordonnées barycentriques, l'équation de ce cercle est

$$\Sigma (p-a)^2\alpha^2 - 2\Sigma (p-b)(p-c)\beta\gamma = 0.$$

Indépendamment du cercle inscrit, il y a trois autres cercles, dits cercles ex-inscrits, tangents non intérieurement aux trois côtés du triangle ABC. Leurs centres I_a, I_b, I_c ont respectivement pour coordonnées barycentriques

$$(-a,\ b,\ c),\ (a,\ -b,\ c),\ (a,\ b,\ -c),$$

et leurs rayons ont pour expressions

$$\frac{S}{p-a},\ \frac{S}{p-b},\ \frac{S}{p-c}.$$

L'équation du cercle I_a (c'est-à-dire du cercle dont le centre est I_a) est

$$p^2\alpha^2 + [(p-c)\beta - (p-b)\gamma]^2 - 2p\alpha[(p-c)\beta + (p-b)\gamma] = 0.$$

Les quatre cercles inscrit et ex-inscrits sont tangents au cercle d'Euler (théorème de Feuerbach).

Par les centres I_a, I_b, I_c des cercles ex-inscrits passe un cercle remarquable dont l'équation est

$$\Sigma\, bc\alpha^2 - 2p\, \Sigma\, a\beta\gamma = 0,$$

et dont le centre est le point de concours des perpendiculaires aux côtés a, b, c, menées respectivement par I_a, I_b, I_c.

Le centre I du cercle inscrit est aussi un point remarquable, non seulement par lui-même, mais parce que l'on peut dire qu'il est la base de la géométrie métrique du triangle, dont tous les éléments s'expriment en fonction des longueurs a, b, c des trois côtés, c'est-à-dire des coordonnées de I. A ce centre effectivement se rattachent un très grand nombre de points qui jouent un rôle important dans la Géométrie du triangle, et parmi lesquels il suffira de citer : les points de Gergonne, les points de Nagel ; les points de Jerabek ; le centre des parallèles égales ; etc.

<u>Cercle isopycnote</u>. — Voir l'ouvrage de Hugo Gylden sur la théorie analytique des planètes.

<u>Cercle isotomique</u>. — Les cercles isotomiques (au nombre de trois) sont symétriques des trois cercles d'Apollonius par rapport aux médiatrices ; en d'autres termes, ce sont les cercles ayant pour diamètres les segments compris sur un côté entre les points isotomiques des pieds des deux bissectrices issues du sommet opposé.

En coordonnées barycentriques, le cercle correspondant au sommet A a pour équation

$$(b^2 - c^2)\Sigma a^2\beta\gamma - [(b^4 - c^4)\alpha + a^2b^2\beta - a^2c^2\gamma]\,\Sigma\alpha = 0$$

ou

$$(b^4 - c^4)\alpha^2 + a^2(b^2\beta^2 - c^2\gamma^2) - c^2(c^2 + a^2 - b^2)\alpha\gamma + b^2(a^2 + b^2 - c^2)\alpha\beta = 0.$$

Les centres des trois cercles, isotomiques des centres des cercles d'Apollonius, sont les points

$$(0,\ c^2,\ -b^2),\ (-c^2,\ 0,\ a^2),\ (b^2,\ -a^2,\ 0)$$

situés sur la droite de Longchamps

$$\Sigma a^2\alpha = 0.$$

Le centre radical des trois cercles isotomiques a pour coordonnées les inverses des quantités

$$a^2(b^2+c^2)\left[(b^2+c^2)^2-a^4\right],\ b^2(a^2+c^2)\left[(a^2+c^2)^2-b^4\right],\ c^2(a^2+b^2)\left[(a^2+b^2)^2-c^4\right].$$

<u>Cercle latéral</u>. — Les cercles latéraux (d'un point) sont les cercles (au nombre de trois) passant par le point donné et par deux sommets d'un triangle donné.

L'équation du cercle latéral du point a_1, b_1, c_1 passant par ce point et par les sommets B et C du triangle ABC est

$$(a_1 \Sigma a_1)(\Sigma a^2\beta\gamma) - (\Sigma a^2 b_1 c_1)(\alpha \Sigma \alpha) = 0.$$

Les cercles latéraux les plus intéressants à signaler sont ceux de l'orthocentre H, qui sont égaux entre eux et au cercle circonscrit ; ces cercles passent, respectivement, par les sommets du triangle complémentaire (formé par les parallèles aux côtés menées par les sommets).

Le cercle latéral HBC a pour équation :

$$(b^2+c^2-a^2)\alpha^2 - a^2\beta\gamma - (a^2-c^2)\alpha\gamma - (a^2-b^2)\alpha\beta = 0.$$

Son centre est au point :

$$a^2(b^2+c^2-a^2),\ (a^2-c^2)^2-b^2(a^2+c^2),\ (a^2-b^2)^2-c^2(a^2+b^2).$$

<u>Cercle pédal</u>. — Le cercle pédal (d'un point) est un cercle associé au triangle et passant par les pieds des trois céviennes du point donné, c'est-à-dire par les points d'intersection des côtés du triangle avec les droites qui joignent ce point aux sommets opposés.

Le cercle pédal du point $D(a_1, b_1, c_1)$ par rapport au triangle ABC a pour équation, en coordonnées barycentriques)

$$2a_1b_1c_1 \Sigma a^2\beta\gamma - \Sigma\left\{b_1c_1\left[\frac{b^2c_1a_1}{c_1+a_1} + \frac{c^2a_1b_1}{a_1+b_1} - \frac{a^2b_1c_1}{b_1+c_1}\right]\alpha\right\}\Sigma\alpha =$$

La propriété caractéristique d'un cercle pédal est la suivante :

Tout cercle pédal d'un point D est pédal d'un autre point D'.

En d'autres termes, les droites qui joignent aux sommets les seconds points de rencontre du cercle pédal d'un point D avec les côtés concourent en un point D' dont les coordonnées sont les inverses des quantités

$$\frac{b^2c_1a_1}{c_1+a_1} + \frac{c^2a_1b_1}{a_1+b_1} - \frac{a^2b_1c_1}{b_1+c_1} ;\ \text{etc.}$$

Le cercle d'Euler est un cercle pédal dont les deux points ou pôles D et D' sont le barycentre G et l'orthocentre H (c'est-à-dire en même temps les deux centres d'homothétie du cercle d'Euler et du cercle circonscrit au triangle).
De même, le cercle inscrit et les trois cercles ex-inscrits sont des cercles pédaux ayant respectivement pour pôles doubles le point de Gergonne intérieur et les trois points de Gergonne extérieurs.

<u>Cercle podaire</u>. — Le cercle podaire (d'un point) est un cercle associé au triangle et circonscrit au triangle podaire d'un point donné D, c'est-à-dire déterminé par les projections du point D sur les côtés.

L'équation générale des cercles podaires est très compliquée; on la forme, dans chaque cas particulier, au moyen des coordonnées des pieds des perpendiculaires. Ainsi, l'équation du cercle podaire du barycentre G est

$$\begin{vmatrix} \frac{2\Sigma a^2\beta\gamma}{\Sigma\alpha} & \alpha & \beta & \gamma \\ a(2a^2+bc\cos B\cos C) & 0 & a+b\cos C & a+c\cos B \\ b(2b^2+ac\cos A\cos C) & b+a\cos C & 0 & b+c\cos A \\ c(2c^2+ab\cos A\cos B) & c+a\cos B & c+b\cos A & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

La propriété caractéristique d'un cercle podaire est la suivante :

Tout cercle podaire d'un point D est podaire d'un autre point D'.

En d'autres termes, les perpendiculaires élevées sur les côtés par leurs seconds points d'intersection avec le cercle podaire de D concourent en un point D'.

Ces propriétés sont faciles à démontrer géométriquement, mais très compliquées à traduire analytiquement.

Le cercle d'Euler est un cercle podaire dont les deux points ou pôles D et D' sont le centre O du cercle circonscrit et l'orthocentre H.

De même, les quatre cercles inscrit et ex-inscrits sont des cercles podaires ayant respectivement leurs centres pour pôles doubles.

<u>Cercle orthotomique</u>. — Supprimer les lignes

relatives à l'identité, non justifiée, des dénominations de cercle orthotomique et de cercle orthogonal. En fait, orthogonal suppose un cercle et une courbe; orthotomique suppose trois cercles.

Note.– On peut remarquer que le cercle orthotomique est la jacobienne de trois cercles.

Cercle polaire.– Au sujet du cercle polaire considéré en Astronomie, on peut ajouter qu'il est aussi le cercle polaire d'un tropique, dans l'acception ordinaire (géométrique) du mot.

Cercle principal.– Cercle décrit sur l'axe focal d'une conique à centre comme diamètre.

Pour la conique à centre

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1,$$

dans laquelle on suppose $A - B > 0$, l'équation du cercle principal est

$$x^2 + y^2 = A.$$

Le cercle principal est la podaire des foyers de la conique (Voir Podaire).

Dans la parabole

$$y^2 = 2px,$$

il se réduit à la tangente au sommet

$$x = 0,$$

qui reste la podaire du foyer.

Le cercle principal est parfois nommé cercle auxiliaire.

Dans l'ellipse, il a un autre rôle; il est le lieu des points obtenus en augmentant toutes les ordonnées, relatives à l'axe focal, dans le rapport $\frac{a}{b}$, et réciproquement, l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

se déduit du cercle

$$x^2 + y^2 = a^2$$

en diminuant toutes les ordonnées relatives à un diamètre dans le rapport $\frac{b}{a}$.

Autrement dit, l'ellipse et la circonférence décrite sur son grand axe (ou axe focal) comme diamètre sont deux courbes affines (dénomination due à Euler). Les ordonnées de ces courbes sont dans un rapport constant.

M étant un point du cercle et M' le point correspondant de l'ellipse, on peut, en désignant par φ l'angle du rayon OM avec le grand axe (angle qui est dit anomalie excentrique) représenter l'ellipse par les équations

$x = a \cos\varphi, \quad y = b \sin\varphi$.

Le cercle principal est quelquefois désigné sous le nom de cercle homographique, mais cette appellation est sujette à objections;

1° elle ne convient pas plus au cercle décrit sur le grand axe qu'à celui décrit sur le petit axe comme diamètre.

2° ces deux cercles se déduisent de l'ellipse par un procédé qui n'est qu'un cas très particulier du procédé général de déformation homographique. A une conique quelconque, on peut faire correspondre, d'une infinité de manières, par homographie, une infinité de cercles.

<u>Cercle secondaire</u>. — Le cercle principal ayant été décrit sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre, on pourra désigner du nom de cercle secondaire le cercle décrit sur le petit axe comme diamètre.

Cette dénomination prête aux mêmes objections que le nom de cercle principal.

<u>Chaînette</u>. — C'est Jean Bernoulli (et non Jacques Bernoulli) qui en fit une étude détaillée dans son traité du Calcul intégral : Lectiones mathematicæ de methodo integralium aliisque, composé à Paris pour le marquis de l'Hospital. La chaînette est traitée dans les leçons XII et XIII de cet ouvrage.

C'est aussi Jean Bernoulli qui a observé que, de toutes les courbes isopérimètres passant par deux points situés à la même hauteur, la chaînette a son centre de gravité le plus bas possible et renferme l'aire maximum.

Comme autre indication bibliographique, on peut citer : Bobillier. De la courbe nommée chaînette : sa description avec figures (Mém. de l'Acad. de Caen. (1) 1, p. 41. 1831).

On a désigné sous le nom de voûte de Poinsot la propriété de la chaînette renversée, à axe vertical, énoncée antérieurement par Gregory et par Stirling, d'être la forme d'équilibre instable d'une voûte formée de voussoirs sphériques, de mêmes dimensions, sans frottement, ce qui revient à dire que la poussée de la voûte s'exerce constamment suivant la tangente ou tout le long de la courbe. Une démonstration de cette propriété a été donnée par Poinsot (Voir P. Appell. Traité de Mécanique rationnelle. T. I. p. 193). La chaînette renversée devrait donc être la

forme théorique des voûtes en ogive, et, pour tracer le profil de ces voûtes, il suffirait de décalquer sur un plan vertical la forme de la chaînette librement suspendue à deux points de ce plan.

D'ailleurs, d'une manière générale, un système articulé étant mis en équilibre stable sous l'influence de la pesanteur, il suffit de le renverser dans la position symétrique par rapport au plan horizontal pour que la même forme convienne à l'équilibre du même système dans sa nouvelle situation. L'art des constructions peut tirer parti de cette propriété très simple et intuitive.

<u>Circonférence</u>. — Le périmètre de la circonférence de diamètre 1 est le nombre π (ou 3.1415926...) dont la notation rappelle le mot grec περίμετρον.

L'aire du cercle de diamètre 1 est $\frac{\pi}{4}$.

Ainsi, la rectification et la quadrature du cercle dépendent de la connaissance du nombre π. Mais ce nombre est incommensurable, de même qu'une foule d'autres nombres que l'on sait pourtant construire par la règle et le compas. C'est pourquoi le problème de la construction géométrique du nombre π, ou de la quadrature du cercle, a de tout temps excité vivement la curiosité des mathématiciens. L'impossibilité de la solution de ce problème a beau être établie, elle ne rebute pas les efforts de certains chercheurs peu versés dans la connaissance des mathématiques et qui se flattent d'y arriver à force de patience et de persévérance. La bibliographie de la quadrature du cercle serait donc aujourd'hui très étendue : ce qui vient d'en être dit suffira pour en démontrer l'inutilité.

<u>Circonférence surosculatrice</u>. — Circonférence ayant un contact du 3e ordre avec une courbe en certains points.

<u>Cissoïde</u>. — Ce nom est la désignation habituelle et abréviative de cissoïde droite ou de cissoïde de Dioclès.

Au point de vue descriptif, c'est une courbe cyclique, dont l'asymptote est tangente d'inflexion.

L'aire totale de la courbe est triple du cercle générateur. Cette propriété, facile à établir par le calcul intégral, a été énoncée par Fermat, en 1661, dans une lettre à Carcavi (Œuvres de Fermat, Édon P. Tannery, t. II. p. 454-455). A l'endroit cité, Fermat signale la propriété de la cissoïde (la

courbe de Diocle) d'avoir, au point M, les quatre lignes PA, PM', PO, PM continument proportionnelles.

Cochléoïde. – L'équation de la cochléoïde se trouve pour la première fois dans le t. III des Annales de Mathématiques de Gergonne.

Bossut (Calcul intégral, an IX) avait déjà proposé la recherche de la courbe lieu des extrémités des arcs circulaires égaux et tangents à l'origine commune.

Cette courbe se présente aussi dans d'autres applications (Voir Collignon. Mécanique. t. II).

La cochléoïde est la perspective de l'hélice vue d'un de ses points.

Sa forme lui a fait donner ce nom: κοχλιον, limaçon, objet en spirale; εἶδος, aspect, forme, perspective.

Collier. – Dénomination proposée par F. Chomé pour la courbe de contact d'un cône ou d'un cylindre circonscrit à une surface.

Voir I. M. 1898, p. 6.

Conchoïde. – Pour les conchoïdes, en général, voir le Mémoire de de la Hire, dans l'Histoire de l'Académie des Sciences pour 1707.

Après les nombreux travaux sur ces courbes, leur étude est à peine abordée, car on n'a pas étudié la transformation plane double (du 4e ordre) qui en donne la clef.

Conique. – Les coniques forment la famille de courbes du second ordre (ou de la seconde classe) dont l'étude se présente immédiatement après celle de la droite (ligne du premier ordre) ou du point (élément de première classe), que les anciens considéraient comme sections planes du cône, et que l'on étudie aujourd'hui, soit par les méthodes de la Géométrie moderne, soit par les méthodes de la Géométrie analytique.

Les anciens ont spécialement étudié les coniques comme sections planes du cône droit, puis comme sections du cône oblique à base circulaire, qui est en réalité un cône du second degré quelconque. De là le nom de Sections coniques souvent donné à ces courbes.

Apollonius de Perge, qui introduisit le premier la considération de ce cône, appelait axe la ligne qui joint le sommet au centre du cercle de base, et triangle par l'axe la section du cône par un plan perpendiculaire

à la base. Il considérait ensuite les sections du cône par des plans perpendiculaires à celui du triangle par l'axe et obtenait des ellipses, des paraboles, ou des hyperboles, selon que ces plans rencontraient les deux côtés du triangle du même côté du sommet du cône, étaient parallèles à un côté, ou rencontraient un côté et le prolongement de l'autre.

Archimède avait découvert, en se servant exclusivement du cône droit, un grand nombre de propriétés élémentaires des coniques; Apollonius en découvrit beaucoup d'autres, notamment celles des foyers et des diamètres conjugués, et les exposa dans un ouvrage célèbre, en huit livres, intitulé κωνικα στοιχεῖα, Éléments des Coniques. — Pour plus de détails, consulter l'Aperçu historique de Chasles.

L'étude des coniques comme sections du cône avait une importance capitale pour les anciens qui ne connaissaient pas d'autre moyen de les envisager. Mais, depuis l'invention des coordonnées par Descartes, la méthode des anciens n'a plus qu'un intérêt historique. En outre, Euler, en signalant les cinq espèces principales de surfaces du second ordre, dont deux (les hyperboloïdes) contiennent des coniques de toute espèce, a donné le moyen de faire l'étude des coniques d'après un hyperboloïde quelconque. Le problème : « Placer une conique donnée sur un cône donné » auquel on attachait jadis une grande importance, est devenu un cas particulier d'un problème plus difficile, mais, en somme d'un intérêt exclusivement théorique : « Placer une conique donnée sur un hyperboloïde donné. »

L'étude élémentaire des coniques se porte presque uniquement sur les propriétés métriques : diamètres conjugués, foyers, directrices, tangentes, normales, etc.

L'étude plus approfondie de ces courbes s'applique à leurs propriétés générales, indépendantes de leur tracé, ayant trait principalement à leurs propriétés projectives, basées sur les théorèmes de Pascal, de Desargues et de Chasles et des propositions corrélatives.

Enfin, l'étude analytique des coniques se fait en coordonnées cartésiennes ou ponctuelles, puis en coordonnées tangentielles.

Les traités de Géométrie analytique donnent

tous une place étendue à l'exposition détaillée des propriétés métriques des coniques, en partant des équations réduites à leurs types les plus simples caractéristiques de chaque genre de conique, ellipse, hyperbole, parabole, et leurs variétés cercle, hyperbole équilatère, et les types exceptionnels de coniques dégénérées en systèmes de deux droites concourantes ou parallèles.

Les coordonnées polaires, trilinéaires et barycentriques s'appliquent aussi avec avantage à la recherche et à la démonstration de différentes propriétés des coniques, mais il faut choisir ces systèmes de coordonnées avec discernement afin de ne les employer que là où elles réussissent le mieux.

La géométrie des coniques trouve une multitude d'applications dans l'Astronomie, la Géodésie, la Physique, la Mécanique. Chaque jour la voit s'enrichir de nouvelles propriétés dont beaucoup sont le fruit du hasard de l'improvisation et de la curiosité des chercheurs.

La combinaison des coniques avec une ou plusieurs droites, avec le triangle, le quadrilatère et d'autres polygones ou d'autres coniques, ou même avec des courbes de toute autre nature, donne lieu à d'innombrables résultats dont les Sciences mathématiques et physiques tirent quelque utilité. Ainsi s'explique pourquoi les mathématiciens n'ont cessé de porter leur attention sur l'étude des coniques.

Dans le présent Recueil les questions relatives aux coniques ne sauraient faire l'objet d'un chapitre spécial. Il a semblé préférable de les résumer par nature de conique et aussi à l'occasion d'autres courbes qui se présentent dans la Géométrie des coniques.

<u>Conique à centre</u>. — Les coniques à centre sont pourvues d'un centre unique. Elles ont pour équation générale réduite

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1.$$

Toute conique à centre possède deux asymptotes (réelles ou imaginaires), deux axes de symétrie, sur chacun desquels se trouvent deux foyers (toujours réels sur un axe, toujours imaginaires sur l'autre), avec une directrice réelle ou imaginaire correspondant à chaque foyer; quatre sommets (dont deux au moins réels); deux cercles directeurs; un cercle de Monge, réel ou ima-

ginaire; un cercle principal; etc. (Voir ces mots).

Une conique à centre coupe la droite de l'infini en deux points distincts, réels ou imaginaires, situés sur les asymptotes représentées par l'équation

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 0.$$

Selon que A et B sont de même signe ou de signes différents, les deux points à l'infini sont imaginaires ou réels. Le premier cas correspond à l'ellipse (Voir ce mot) et à ses variétés (cercle; ellipse imaginaire; point). Le second correspond à l'hyperbole (Voir ce mot) et à sa variété (angle de deux droites réelles).

L'équation générale de la tangente de direction m de la conique est

$$y = mx \pm \sqrt{Am^2 + B}.$$

Les coniques à centre ont des propriétés communes, en nombre infini, pour lesquelles on ne peut que renvoyer aux Traités de Géométrie analytique: il suffira ici de faire mention des deux théorèmes d'Apollonius:

I. La somme algébrique des carrés de deux diamètres conjugués est constante.

II. L'aire du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est constante.

Pour des propriétés relatives aux normales, voir Hyperbole d'Apollonius, Cercle de Joachimsthal, etc.

<u>Conique</u> <u>anorthotomique</u>. — Étant donnés une conique C^2 et deux points P, Q dans son plan, il y a en général une autre conique K^2 qui forme avec elle un couple tel que chaque rayon mené par P ou par Q coupe les deux coniques en quatre points harmoniques (deux sur la même courbe). Jeffery a proposé de désigner ces coniques sous le nom de coniques anorthotomiques (Proceed. of London Math. Soc. t. XXI, p. 287; 1890). V. Retali les avait appelées auparavant coniques associées par rapport au couple P, Q (Proj. imag.; R. acc. di Bologna, t. VII (4), 1886), et G. Kœnigs les appelle justement couple de Pappus.

Si les points P, Q sont conjugués par rapport à C^2 et que R soit le pôle de $|PQ|$, K^2 se décompose en deux droites $|RP|$, $|RQ|$.

Lorsque P et Q coïncident en un même point, K^2 est la conique conjuguée à C^2 par rapport à ce point.

Si C^2 est un cercle ayant P pour centre, K^2 est le cercle ayant le point Q pour centre, et orthogonal à C^2 (Voir I.M, t. I, p. 21, 1894, P. Tannery; p. 77-80, G. Kœnigs; t. IV. 1897, p. 54, V. Retali).

Conique associée. — Voir Conique anorthotomique.

Conique cayleyenne. — Si une cubique donnée est unicursale, sa cayleyenne se décompose en une conique et un faisceau de la première classe ayant pour centre le point double de la cubique. Em. Weyr appelle cette conique, conique de Cayley, ou conique cayleyenne (Sitzungsb. der K. AK. Wien. t. 81, p. 172).

Voir aussi Courbe d'involution.

Conique centrale. — Dénomination équivalente, mais non préférable, à celle de conique à centre.

Conique centralement associée. — La définition donnée peut s'abréger en disant: Conique ayant pour centre un point donné et passant par les pieds des céviennes de ce point.

Conique complémentaire. — Deux coniques concentriques sont dites complémentaires lorsqu'elles sont mutuellement conjuguées par rapport à leur centre commun.

Exemples: I. Les deux cercles

$$x^2+y^2 \pm a^2 = 0.$$

II. Deux hyperboles conjuguées (dans le sens ordinaire).

Les coniques conjuguées à une conique par rapport aux points de sa conique complémentaire sont des paraboles (V. Retali).

Voir Conique conjuguée.

Conique conjuguée. — Si P et p sont pôle et polaire par rapport à une conique C^2, le lieu des couples de points séparés harmoniquement par P et p, et conjugués par rapport à C^2, est une conique, doublement tangente à C^2 sur la droite p, qui a été appelée conjuguée à C^2 par rapport au pôle P (à la droite p) (V. Retali).

Deux coniques mutuellement conjuguées sont chacune polaire réciproque d'elle-même par rapport à l'autre.

Lorsque P est à l'infini, on retombe sur les coniques supplémentaires de Poncelet; si p est la droite de l'infini, on a la conique complémentaire de C^2 (conjuguée à C^2 dans le sens ordinaire du mot).

Suivant que P est extérieur ou intérieur à C^2, la conique conjuguée est réelle ou imaginaire, de la première espèce (ellipse imaginaire).

Si C^2 est une hyperbole, sa conjuguée est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que P est intérieur, appartient ou est extérieur à l'hyperbole conjuguée de C^2 (dans le sens ordinaire).

Les coniques C_p^2, C_q^2, conjuguées à C^2 par rapport à P et Q se coupent en général en quatre points A, B, C, D tels que les quatre coniques C_a^2, C_b^2, C_c^2, C_d^2, conjuguées à C^2 par rapport à ces points, passent par P et Q.

Dans le plan d'une conique, il y a donc, en général, quatre points tels que les coniques conjuguées à celle-ci par rapport à ces points sont des cercles.

Si P et Q sont conjugués par rapport à C_1^2 les coniques C_p^2, C_q^2 sont mutuellement conjuguées par rapport au pôle de la droite $|PQ|$ relatif à C^2.

Les coniques C_p^2, C_q^2, C_r^2 conjuguées à C^2 par rapport aux sommets P, Q, R d'un triangle conjugué (à C^2) forment avec C^2 un quaterne C^2, C_p^2, C_q^2, C_r^2, fort important, de coniques dites harmoniques.

Deux coniques quelconques sont polaires réciproques l'une de l'autre par rapport à quatre coniques qui forment un quaterne de coniques harmoniques (théorème de Steiner).

Si deux coniques réelles sont mutuellement conjuguées, elles sont en homologie harmonique, en prenant l'un des points de contact pour centre et la tangente en l'autre point de contact pour axe d'homologie.

Les coniques conjuguées à C^2 et séparées harmoniquement par deux points P et Q ont leurs pôles de contact sur la conique qui avec C^2 forme le couple de Pappus, par rapport aux points P et Q. Il y a donc en général ∞^1 hyperboles équilatères conjuguées à une conique donnée; etc.

Les coniques conjuguées à un cercle par rapport aux points d'un cercle orthogonal sont séparées harmoniquement par les centres des deux cercles.

Toute conique à centre a quatre cercles conjugués, etc. (Voir Osservazioni analitico-geometriche, etc. p. 628 et suiv. Mem. della R. acc. d. Bologna. t. VII (4), 1886) (V. Retali).

Pour la bibliographie du sujet, voir aussi:
V. Retali: Sopra una serie etc. (Mem. della R.

Acc. di Bologna, t V(4), 1884; Sulle coniche conjugate, Ibid. t. VI (4).
Ch. Wiener. Lehrbuch der Darstellenden Geometrie. t I. pp. 315-325 (1884)
G. Tarry. Représentation géom. des coniques et quadriques imaginaires. Paris. 1886.
V. Retali. Projez. imaginaria etc. Mem. di Bologna. t. VII (4) pp. 601-632. 1886.
Ch. Wiener. Lehrb. t. II. p. 89 et suiv. 1887.
V. Retali. Sopra due trasform. Mem. di Bologna t. X (4). Sur le double contact... etc. Mém. de la Société royale de Liège. t XVII (2).

Comme exemple particulier de conique conjuguée, on peut mentionner la parabole

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 = 0.$$

Son foyer a pour coordonnées trilinéaires

$$\alpha' = \frac{b+c}{\sin A}, \quad \beta' = \frac{a+c}{\sin B}, \quad \gamma' = \frac{a+b}{\sin C}.$$

Note. — Le triangle de référence est dit autopolaire (ou conjugué) par rapport à la conique dite conjuguée au triangle.

Coniques de divers degrés. — Voir aux articles correspondant à ellipses, hyperboles et paraboles de divers degrés.

Conique de base. — Conique que l'on peut substituer à un cercle pour l'étude des propriétés métriques d'une figure, qui se transforment alors en propriétés quasimétriques, par application du principe de l'homographie (Voir : L. Ripert, La dualité et l'homographie dans le triangle et le tétraèdre. Paris. 1898).

Conique de Fregier. — Voir Ellipse de Fregier.

L'application du théorème de Fregier à une conique quelconque donne pour lieu du point de Fregier une conique homothétique à la proposée.

La dénomination de Conique de Fregier est donc plus justifiée que celle d'ellipse de Fregier.

Conique de n points. — Pour la conique des neuf points, voir N. A. I. 1842, p. 199, quest. 21 ; 1877, p. 188 et quest. 626 ; 1863, p. 562.

La conique des neuf points est la généralisation du cercle des neuf points (ou cercle d'Euler) (Voir ce mot).

Il existe une série de coniques des sept points immédiats. A tout point du plan d'un triangle correspondent une infinité de coniques des sept points immédiats. En effet, les trois sommets d'un triangle, les deux points de Brocard, le point de Steiner et le réciproque du complémentaire du point de Lemoine sont sur une hyperbole

$$\Sigma (a^4 - b^2c^2)\beta\gamma = 0$$

L. Ripert. — La dualité et l'homographie dans le triangle et le tétraèdre, p. 14. Paris, 1898.
E. Cesaro. — N. A. quest. 1565. p. 582. 1887.

<u>Conique directrice</u>. — Conique par rapport à laquelle s'effectue la transformation d'une figure en figure corrélative par la méthode des polaires réciproques (Voir Polaire réciproque).

La conique directrice est aussi parfois appelée Conique fondamentale.

Lorsque l'on veut étudier spécialement des propriétés métriques, on prend un cercle pour conique directrice.

<u>Conique excentrique</u>. — Nom donné par Chasles aux coniques focales des quadriques (Aperçu historique, Note XXXI).
Cette locution est tombée en désuétude.

<u>Conique focale</u>. — Lieu de foyers dans une quadrique non de révolution.

On appelle foyer d'une quadrique tout point tel que le carré de sa distance à un point quelconque de la surface soit égal au produit de deux fonctions rationnelles et linéaires des coordonnées de ce point ; ou, ce qui revient au même, un point F est dit foyer d'une quadrique si on peut lui associer deux plans P et P' tels que le carré de la distance de F à un point quelconque M de la surface soit au produit des distances de M aux deux plans P et P' dans un rapport constant.

Les deux plans P et P' correspondant à un foyer F se coupent suivant une droite D qui est dite la directrice correspondant au foyer F.

Toute quadrique à centre, non de révolution

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1$$

a une infinité de foyers, situés dans ses plans principaux, sur trois coniques, dites focales, comprenant, dans toutes les hypothèses, une ellipse réelle, une hyperbole et une ellipse imaginaire, dont

Les équations sont

$$(f_1)\qquad x=0,\qquad \frac{y^2}{B-A}+\frac{z^2}{C-A}=1.$$

$$(f_2)\qquad y=0,\qquad \frac{z^2}{C-B}+\frac{x^2}{A-B}=1,$$

$$(f_3)\qquad z=0\qquad \frac{x^2}{A-C}+\frac{y^2}{B-C}=1.$$

Les équations de la directrice correspondant au foyer $(0, \beta, \gamma)$ de la focale (f_1) sont

$$(D)\qquad y=\frac{B\beta}{B-A},\quad z=\frac{C\gamma}{C-A}.$$

Le lieu des directrices de tous les points de la focale (f_1) est le cylindre directeur dont l'équation est

$$\frac{B-A}{\beta^2}y^2+\frac{C-A}{C^2}z^2=1.$$

Tout paraboloïde

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x,$$

non de révolution, a deux focales (paraboles toujours réelles) dont les équations sont

$$z=0,\qquad y^2=2(p-q)\left(x-\frac{q}{2}\right).$$

$$y=0,\qquad z^2=2(q-p)\left(x-\frac{p}{2}\right).$$

Tout cône du second degré

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=0$$

a deux droites focales réelles (et quatre imaginaires). Les équations des focales réelles, dans l'hypothèse où B est l'axe moyen, sont données par l'équation

$$\frac{z^2}{C-B}+\frac{x^2}{A-B}=0.$$

Les focales des quadriques, découvertes à peu près à la même époque (1829) par Chasles (Aperçu historique, note XXXI) et par Mac-Cullagh, ont de nombreuses propriétés, pour la plupart correspondant à celles des systèmes de deux foyers situés sur un axe des coniques, et pour lesquelles on ne peut que renvoyer à l'ouvrage de Chasles et aux Traités de Géométrie analytique.

Une quadrique de révolution n'a pas de focales, mais elle a, sur son axe, deux foyers, réels ou imaginaires, qui sont ceux de sa section méridienne.

<u>Conique fondamentale</u>. — Voir Conique directrice.

<u>Conique homofocale</u>. — Conique ayant mêmes foyers qu'une conique donnée.

Si une conique a pour équation

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1,$$

l'équation générale des coniques homofocales est

$$\frac{x^2}{A+\lambda} + \frac{y^2}{B+\lambda} = 1.$$

Si la conique donnée est une parabole

$$y^2 = 2px,$$

les paraboles homofocales à la proposée ont pour équation générale

$$y^2 = (p+\lambda)(2x+\lambda).$$

Parmi de très nombreuses propriétés des coniques homofocales, on peut signaler les suivantes :

1.° Par tout point du plan passent deux coniques homofocales à une conique donnée.

2.° Deux coniques homofocales se coupent orthogonalement en tous leurs points communs.

3.° Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à deux coniques homofocales est un cercle concentrique.

Etc. Voir les traités de Géométrie analytique.

Note. — Lorsqu'on lance une bille dans une direction déterminée sur un billard elliptique, les directions successives de cette bille sont toutes tangentes à une même conique ayant les mêmes foyers que l'ellipse qui limite le billard (I. M. 1899, p. 40. J. Franel).

Conique homotangente. — Les coniques homotangentes sont les coniques tangentes à deux droites données (réelles ou imaginaires) passant par l'origine des coordonnées.

La conique proposée ayant pour équation tangentielle

$$AU^2 + 2BUV + CV^2 + \dots = 0,$$

l'équation tangentielle des coniques homotangentes sera

$$AU^2 + 2BUV + CV^2 + 2\lambda UR + 2\mu VR + \nu R^2 = 0.$$

Les coniques homotangentes sont les corrélatives des coniques homothétiques (Voir ce mot), et jouissent de toutes les propriétés corrélatives de celles des coniques homothétiques auxquelles peut conduire l'application du principe de dualité (L. Ripert, La dualité et l'homographie dans le triangle et le tétraèdre. Paris. 1898).

Conique homothétique. — Des coniques sont dites homothétiques lorsqu'elles coupent la droite de l'infini aux mêmes points (réels ou imaginaires).

La conique proposée étant représentée par l'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \dots = 0,$$

l'équation générale des coniques homothétiques sera

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2\lambda x + 2\mu y + \nu = 0.$$

Deux ellipses ou deux paraboles homothétiques sont semblables et semblablement placées.

Deux hyperboles peuvent être homothétiques sans être ni semblables ni semblablement placées; mais, si elles ont leurs asymptotes respectivement parallèles, elles doivent être néanmoins considérées comme homothétiques, parce qu'elles sont l'une et l'autre homothétiques à une troisième conique (l'angle des deux asymptotes). Ainsi, toutes les hyperboles

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda$$

sont homothétiques, comme étant homothétiques à

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Pour la même raison, toutes les ellipses de la famille

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \lambda$$

sont homothétiques, bien qu'elles soient réelles ou imaginaires, suivant que l'on prend $\lambda > 0$ ou $\lambda < 0$, parce qu'elles sont homothétiques à l'ellipse évanouissante

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Une conique, assujettie à être homothétique à une conique donnée, est déterminée par trois conditions seulement; elle se présente dans les mêmes conditions que le cercle dont elle est une transformée homographique, et jouit de toutes les propriétés du cercle que l'on peut obtenir par le principe d'homographie (L. Ripert. – La dualité et l'homographie, .. etc. Paris. 1898).

<u>Conique</u> (I). Cette dénomination s'appliquant à une conique centralement associée à un point, on peut en étudier une infinité, mais, de ces courbes, il n'y en a qu'une vraiment intéressante; c'est la deuxième ellipse de Steiner.

Voir Ellipse de Steiner.

<u>Conique osculatrice</u>. – Voir Courbe osculatrice.

Une conique C^2 osculatrice à une courbe C^m d'ordre supérieur à 2, a, en général avec cette courbe, un contact du cinquième ordre. Si C^m est elle-même une conique, l'ordre du contact s'abaisse à 4.

Si C^2 est un cercle, l'ordre du contact s'abaisse à 3, car un cercle est déterminé par trois conditions ; le cercle est dit alors cercle de courbure (Voir ce mot).

Le contact d'une conique avec une autre courbe peut être d'un ordre supérieur à 5 en certains points particuliers ; ainsi, une cubique non singulière a en général, 27 points en chacun desquels elle a un contact du 6e ordre avec la conique osculatrice (Steiner).

Voir aussi G. Salmon. Courbes planes. p. 511.

Conique Satellite. — Les points de contact des six tangentes que l'on peut mener à une cubique non singulière par un point quelconque P sont sur une conique P^2, conique polaire du point P. Les tangentiels de ces six points (c'est-à-dire les points de rencontre des six tangentes avec la cubique) se trouvent sur une autre conique Π^2 appelée conique satellite de P^2 (par rapport au point P et à la cubique).

Les coniques P^2 et Π^2 ont entre elles un double contact sur la droite polaire de P par rapport à la cubique.

Voir : Cremona, Curve piane. art. 138, p. 416. — Durège. Curven 3 Ordn. pp. 273-276.

Conique supplémentaire. — Si A et B sont les extrémités d'un diamètre d'une conique C^2, la conique homologique harmoniquement à C^2, lorsqu'on prend A pour centre d'homologie et la tangente en B pour axe d'homologie est dite par Poncelet, supplémentaire de C^2. (Propr. project. t. I. n° 54 et suiv.)

Elle est conjuguée à C^2 par rapport au point à l'infini du diamètre conjugué à AB.

Par exemple, les coniques supplémentaires d'un cercle sont les hyperboles équilatères bitangentes ayant même centre.

Voir Conique conjuguée.

Contour. — Contour, ou périmètre, courbe ou ligne délimitant une aire.

Contour apparent. — Pour la bibliographie, voir : M. d'Ocagne : Cours de Géométrie descriptive et infinitésimale, 1896, p. 329.

N. A. 1895, p. 262.

Couple de Pappus. — Voir aux articles : Conique anorthotomique et conique conjuguée.

Courbe à axe. — Courbe pourvue d'un axe de symétrie, c'est-à-dire d'une droite d telle, que, à chaque point A de la courbe, corresponde un point B symétrique par rapport à d.

Les tangentes en deux points symétriques sont égales et se coupent sur l'axe.

Si une courbe a deux axes de symétrie, leur point d'intersection est centre de la courbe (Voir Courbe à centre).

Une courbe ne peut avoir n axes de symétrie que si ces axes concourent en un même point et font deux à deux des angles égaux, ou en d'autres termes, divisent le plan en régions angulaires égales.

Si le nombre d'axes est impair, le point de concours n'est pas un centre de la courbe; le point est un centre si le nombre d'axes est pair.

En désignant par $C=0$ et $p=0$ les équations d'un cercle quelconque et d'une droite quelconque, l'équation $f(C,p)=0$ est l'équation générale des courbes à axe, celui-ci étant la perpendiculaire abaissée du centre de C sur la droite p.

Courbe à centre. — Courbe pourvue d'un point C tel, que, à tout point A de la courbe, corresponde un point B symétrique de A par rapport à C.

Si l'origine est centre d'une courbe algébrique d'ordre m, l'équation de cette courbe ne peut contenir que des termes de même parité que l'ordre m; d'où résulte, par translation de l'origine en un point indéterminé (α, β), un moyen facile de reconnaître si cette courbe a un centre.

Toute courbe d'ordre impair, pourvue d'un centre, passe par ce centre qui est un point d'inflexion de la courbe.

Les coniques ont, en général, un centre unique.

Une courbe algébrique proprement dite, d'ordre supérieur à 2, n'a qu'exceptionnellement un centre et ne peut en avoir plus d'un. Elle ne peut avoir une ligne de centres que lorsqu'elle est constituée par un système de parallèles, disposées symétriquement de part et d'autre.

Chasles a démontré que, dans toute courbe algébrique d'ordre m, il existe un point fixe, centre des moyennes distances du système des $m(m-1)$ points

de contact (réels ou imaginaires) de tout faisceau de tangentes parallèles, et qui peut, à beaucoup d'égards, être considéré comme un centre.

Si une courbe a deux centres, elle en a une infinité sur leur droite de jonction. Exemples: la sinusoïde, la tangentoïde, la sécantoïde. (Voir ces mots).

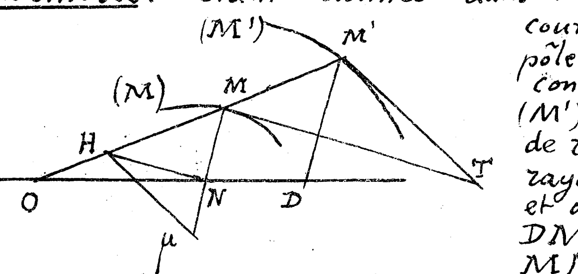
Si une courbe a trois centres, non en ligne droite, elle en a une infinité situés aux sommets du réseau de parallélogrammes déterminé par ces trois points.

A l'exception du système de parallèles susmentionné, ces cas ne peuvent se présenter que pour les courbes transcendantes.

__Courbe acnodale__. Courbe pourvue d'un point isolé.

__Courbe adjointe__. — Courbe qui passe une fois par tous les points doubles et les points de rebroussement de la courbe fixe; ou en général qui passe $(K-1)$ fois par tous les points multiples d'ordre K pour celle-ci, sans que les branches particulières des deux courbes s'y touchent (Voir Brill et Nöther, Gottinger Nachr. 1873; Math. Annalen, t. VII, p. 269.).

__Courbe adjointe des directions normales__. — Étant donnés dans le plan d'une courbe (M) deux pôles O et D, on construit la courbe (M') lieu du point de rencontre M' du rayon vecteur OM et de la parallèle DM' à la normale MN menée par D.



Propriété fondamentale: Par le point N où la normale MN rencontre OD, menons NH parallèle à la tangente MT, puis par le point H où NH rencontre le rayon vecteur OM, $H\mu$ parallèle à $M'T$. Cette dernière droite coupe la normale MN au centre de courbure μ.

Cette courbe adjointe (M') a été envisagée pour la première fois par M. d'Ocagne qui en a étudié les propriétés très en détail dans deux Mémoires (American Journ. of Math. 1888, p. 55, et 1892, p. 227); S. M. 1892, p. 49. Il en a résumé les propriétés dans son Cours de Géométrie

descr. et infinit. p. 283 (Paris, 1896) où il lui a donné le nom de courbe adjointe des directions normales.

Courbe affine. — Deux courbes sont dites affines lorsque, pour des points correspondant à la même abscisse, les ordonnées sont dans un rapport constant.

La notion des courbes affines est due à Euler.

Comme exemples de ces courbes, on peut citer l'ellipse et les cercles décrits sur le grand axe (cercle principal) ou sur le petit axe (cercle secondaire) pour diamètre.

Les sinusoïdes

$$y = \sin x, \quad y = m \sin x,$$

sont affines.

Pour deux paraboles affines, voir M. 1897. p. 255, quest. 1061.

Courbe algébrique. — Courbe représentée par une équation algébrique ponctuelle $f(x, y, t) = 0$ ou tangentielle $f(u, v, z) = 0$, f étant un polynome algébrique entier, fonction des coordonnées x, y, t ou u, v, z.

Le degré m de cette fonction s'appelle l'ordre de la courbe $f(x, y, t) = 0$ ou la classe de la courbe $f(u, v, z) = 0$. (Voir les articles: Courbe d'ordre m et Courbe de classe m).

Les mêmes définitions subsistent en coordonnées trilinéaires.

En coordonnées polaires, une courbe $f(r, \theta) = 0$ est algébrique si l'angle θ n'entre dans l'équation que par ses lignes trigonométriques et dans la forme des fonctions algébriques.

Dans l'espace, une courbe algébrique est, en principe, celle qui est représentée par les équations ponctuelles de deux surfaces algébriques dont elle est l'intersection, ou par une équation tangentielle algébrique dans laquelle le discriminant du premier membre est divisible par celui-ci; quand le discriminant est identiquement nul, la courbe est plane (voir: courbe plane, courbe gauche).

En plan ou dans l'espace, une courbe algébrique peut aussi être donnée par des équations unicursales (voir: courbe unicursale, courbe de genre D, et en particulier de genre zéro).

Toute courbe algébrique est essentiellement continue.

Courbe anticonjuguée. — Par chaque point (u, v) d'une surface passent quatre lignes (réelles ou imaginaires) sur lesquelles est constant le carré du cosinus de l'angle que leurs tangentes forment avec les tangentes aux points correspondants de leurs représentations sphériques de Gauss. A chaque valeur particulière du carré du cosinus correspond un groupe particulier de quatre lignes ayant la propriété que voici : de ces quatre lignes, deux qui ont au point $(u.v)$ des directions conjuguées, sont dites conjuguées ; deux lignes au contraire qui au point $(u.v)$ ont chacune une direction symétrique par rapport aux lignes de courbure avec la conjuguée de l'autre, sont dites anticonjuguées (Ruffini, Rappresent. sferica del Gauss. — Mem. de l'ac. roy. de Bologne. t. VIII (4).)

Courbe bitangente. — Courbe tangente à une autre courbe en deux points, généralement distincts. — Voir Courbe tangente.

Courbe bitangentielle. — Courbe passant par les points de contact des tangentes doubles d'une courbe donnée $U=0$. Si $H=0$ est la hessienne, en désignant par L', M', N' ses dérivées premières, $a', b', c' \ldots$ ses dérivées secondes, $a, b, c \ldots$ les dérivées secondes de U, la bitangentielle de la quartique $U=0$ est

$$\Theta = 3H\Phi,$$

où

$$\Theta = (bc-f^2)L'^2 + (ca-g^2)M'^2 + (ab-h^2)N'^2 + 2(gh-af)M'N' + 2(hf-bg)L'N' + 2(fg-ch)L'M',$$

$$\Phi = (bc-f^2)a' + (ca-g^2)b' + (ab-h^2)c' + 2(gh-af)f' + 2(hf-bg)g' + 2(fg-ch)h'.$$

C'est une courbe du quatorzième ordre. (Voir G. Salmon ; courbes planes, pp. 316, 487, 496).

Courbe complémentaire. — Lieu des points complémentaires des points d'une courbe donnée.

On appelle point complémentaire d'un point M, par rapport à un triangle ABC, le point M' obtenu en menant la droite MG (G étant le barycentre du triangle) et la prolongeant de la moitié de sa longueur.

Si (α, β, γ) sont les coordonnées barycentriques de M, les coordonnées de son point complémentaire M' sont $(\beta+\gamma, \alpha+\gamma, \alpha+\beta)$.

On appelle point anticomplémentaire de M le

point dont M est le complémentaire, c'est-à-dire le point obtenu en prolongeant MG du double de sa longueur.

Les coordonnées du point M'' anticomplémentaire de $M(\alpha, \beta, \gamma)$ sont $(\beta+\gamma-\alpha,\ \alpha+\gamma-\beta,\ \alpha+\beta-\gamma)$.

Le lieu des points anticomplémentaires des points d'une courbe donnée s'appelle la courbe anticomplémentaire de cette courbe.

L'équation de la courbe proposée étant

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

celle de la courbe complémentaire sera

$$f(\beta+\gamma-\alpha,\ \alpha+\gamma-\beta,\ \alpha+\beta-\gamma) = 0;$$

celle de la courbe anticomplémentaire sera

$$f(\beta+\gamma,\ \alpha+\gamma,\ \alpha+\beta) = 0.$$

Courbe conjuguée. — Voir Courbe anti-conjuguée.

Courbe continue. — Courbe représentée par une équation algébrique ou transcendante dont le premier membre est une fonction continue.

Une courbe continue ne peut présenter aucune solution de continuité, ni dans la succession de ses points, ni dans celle de ses tangentes; elle ne peut donc avoir ni point d'arrêt ni point anguleux.

Toute courbe algébrique est continue.

Les courbes transcendantes peuvent être continues (Exemples: la sinusoïde, la cycloïde, la chaînette, etc); mais elles peuvent aussi être non continues ou discontinues (Voir ces mots).

Courbe corrélative. — Les courbes corrélatives sont les courbes telles que l'équation ponctuelle de l'une devienne l'équation tangentielle de l'autre par simple transposition des coordonnées.

La courbe corrélative de $f(x, y, t) = 0$ est $f(u, v, z) = 0$, et réciproquement.

La considération des courbes (et plus généralement des figures) corrélatives constitue l'application du principe de dualité.

A une courbe d'ordre m et de classe n correspond une courbe d'ordre n et de classe m.

Dans l'espace, une courbe n'a pas pour corrélative une courbe, mais une surface développable, et réciproquement, une développable n'a pas pour corrélative une développable, mais une courbe; si la développable est conique, la courbe est plane, et réciproquement.

Courbe crunodale. — Courbe pourvue d'un

point double nodal, c'est-à-dire d'un noeud ou d'une boucle (Voir ces mots).

Courbe cuspidale. — Courbe pourvue d'un point de rebroussement.

Le rebroussement de 1e espèce (les deux branches de courbe du même côté de la tangente) est quelquefois dit cuspidal Kératoïde (κέρας, corne; εἶδος, aspect, forme), et le rebroussement de 2e espèce (les deux branches de courbe de chaque côté de la tangente), cuspidal ramphoïde (ῥάμφος, bec d'oiseau; εἶδος, aspect, forme).

Voir G. Salmon, Courbes planes, 1884, pp. 69-70, 303-307.

Courbe de Delaunay. — Pour une application des courbes de Delaunay à un problème d'hydrostatique, voir un article de L. Lecornu (Mém. de l'Ac. n. de Caen 1889, pp. 12-33; une planche).

Courbe de direction. — La dénomination de courbes de direction a été proposée par E. Laguerre (C. R. t. XCIV, 1882).

Ces courbes sont caractérisées par ce fait que les intégrales abéliennes qui s'y rattachent peuvent servir à en exprimer l'élément d'arc.

Soit

$$F(x, y) = 0$$

l'équation d'une courbe algébrique. Nous avons

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2}}{F_y'}\,dx,$$

d'où la formule

$$s = \int \frac{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2}}{F_y'}\,dx$$

qui, à cause du radical, ne peut, en général, s'exprimer par une intégrale abélienne relative à la fonction F; mais cela deviendra possible si l'on a

$$\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2} = \varphi(x, y),$$

φ étant une fonction rationnelle.

Cette dernière relation caractérise les courbes de direction.

On peut remarquer que la courbe

$$\varphi(x, y) = 0$$

passe par les points singuliers de la proposée; c'est donc une courbe adjointe de celle-ci (voir courbe adjointe).

On voit donc que si l'on applique le théorème d'Abel aux courbes de direction, après les avoir coupées par une courbe algébrique de degré déterminé, on obtient des relations remarquables entre les arcs de la courbe primitive comptés d'un point fixe jusqu'aux points d'intersection de la courbe sécante.

En voici un exemple emprunté à l'ouvrage: Appell et Goursat: Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales, p. 523.

La courbe dont l'équation en coordonnées polaires est

(T) $$r^3 = a^3 \cos 3\theta$$

est une courbe de direction. On a en effet

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = \frac{a^3 d\theta}{r^2} = \frac{a^3}{x^2+y^2}\, d.\, \mathrm{arc\,tg}\, \frac{y}{x} = \frac{a^3(x dy - y dx)}{(x^2+y^2)^2}.$$

L'intégrale

$$s = a^3 \int \frac{x dy - y dx}{(x^2+y^2)^2}$$

est finie dans tout le plan et, par suite, de première espèce.

Donc, si l'on coupe la courbe T qui est du sixième degré par une courbe algébrique C_n de degré n, et si l'on désigne par $s_1, s_2, \ldots s_{6n}$ les arcs comptés depuis des points fixes de la courbe jusqu'aux points où elle est rencontrée par C_n, le théorème d'Abel donne

(S) $$s_1 + s_2 + \cdots + s_{6n} = C^{te}.$$

Pour prendre un exemple simple, supposons que C_n soit une courbe du second degré C_2.

On peut simplifier encore la considération des points d'intersection en supposant six d'entre eux aux points cycliques et trois autres en O, au point triple de la courbe T. Il reste alors seulement trois points d'intersection variables A, B, C, et d'ailleurs C_2 est forcément un cercle.

Parcourant alors la courbe toujours dans le même sens, la relation (S) devient

$$\text{arc } \widehat{OA} + \text{arc } \widehat{BO} + \text{arc } \widehat{CO} = C^{te}.$$

Changeant convenablement les sens de parcours, on a finalement

$$\widehat{OA} = \widehat{OB} + \widehat{OC}.$$

La constante primitive est nulle, car elle doit l'être en même temps que le rayon du cercle C_2.

<u>Courbe de fuite</u>. — Courbe que décrit un point P animé d'une vitesse constante, et cherchant à s'éloigner le plus possible d'un autre point M, animé aussi d'une vitesse constante, mais se déplaçant sur une ligne donnée AB.

P M A B

On voit, dans ces conditions, que le mouvement instantané du point P doit être dirigé suivant MP. La courbe de fuite lieu du point P a donc toujours PM pour tangente.

Ainsi, la courbe de fuite n'est pas distincte de la courbe de poursuite. Elle est seulement parcourue en sens inverse.

La dénomination de courbe de fuite paraît peu employée en français, mais il n'en est pas de même en anglais et en allemand (Fluchtcurve).

La courbe de fuite est mentionnée comme le contraire de la courbe de poursuite dans le Manuel de Physique théorique de Thomson et Tait (p. 31 de la traduction allemande par Helmholtz et Wertheim, intitulée : Handbuch der theoretischen Physik.

<u>Courbe d'égal argument</u>. — Soit f une fonction monogène de la variable complexe $x+iy$ $(i = \sqrt{-1})$. Posons

$$f(x+iy) = X + iY.$$

Si l'on fait décrire un certain chemin au point (x, y), le point (X, Y) décrira un chemin correspondant, dont l'élément d'arc sera proportionnel à l'élément d'arc du premier (cette propriété n'est pas évidente, mais elle est aisée à établir).

Si donc le premier point décrit un triangle infiniment petit, le second décrira un triangle semblable, qui aura, par conséquent, les mêmes angles. On voit que la transformation considérée conserve les angles.

Faisons maintenant décrire au point (X, Y) des circonférences ayant l'origine pour centre et des droites passant par l'origine : en d'autres termes, posons tour à tour

$$(1) \quad X^2 + Y^2 = C^{te} \quad \text{et} \quad \frac{Y}{X} = C^{te}.$$

La fonction f aura alors, successivement, un module constant et un argument constant, et les lignes décrites par le point (x, y) qui correspondent respectivement aux courbes (1) seront les lignes de module constant (ou d'égal module) et les lignes d'argument constant (ou d'égal argument) de la fonction f.

L'importance de ces lignes tient à ce qu'elles forment un système orthogonal, ce qui s'explique par le fait que les lignes (1) sont orthogonales. De là un moyen de trouver une infinité de systèmes orthogonaux.

Pour plus de développements, voir H. Laurent Traité d'Analyse, t. V. pp. 93-97.

Courbe d'égal module. – Voir Courbe d'égal argument.

Courbe de genre D. – Courbe algébrique, ayant un nombre D de points doubles en déficit (deficiency) sur le nombre maximum M de ces points que son ordre m comporte.

On sait que le nombre maximum de points doubles d'une courbe d'ordre (ou de degré) m est

$$M = \frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

Si une courbe d'ordre m a $(M - D)$ points doubles, elle est dite de genre D (ou quelquefois de déficience D).

Ainsi, pour une cubique $(m = 3)$, on a $M = 1$. Les cubiques sont donc de genre zéro ou du genre (maximum) 1 selon qu'elles ont 1 ou 0 point double.

A $m = 4$ correspond $M = 3$; les quartiques sont donc de genre 0, 1, 2 ou 3, selon qu'elles ont 3, 2, 1 ou 0 points doubles.

On a considéré tout particulièrement les courbes de genre zéro parce que ces courbes sont fréquemment unicursales (voir courbe unicursale); mais il n'est pas exact de dire ou d'admettre, comme on le fait parfois, que toute courbe unicursale est de genre zéro. Ce qui est exact (sans que la réciproque soit vraie) c'est que toute courbe de genre zéro peut être représentée par

deux équations de forme unicursale (en fonction d'un paramètre).

La notion de genre a une grande importance en géométrie, car on démontre que le genre est le même pour une courbe et sa réciproque ; pour deux courbes liées entre elles par une correspondance linéaire ; qu'il n'est pas altéré par les transformations de Cremona, ni par les transformations dans lesquelles un point d'une courbe a pour correspondant un point unique de l'autre courbe.

Pour la bibliographie et le développement du sujet, voir G. Salmon, Courbes planes, passim.

<u>Courbe de Gutschoven</u>. — Courbe mécanique, lieu du sommet M d'une équerre dont un côté MB de longueur donnée a, s'appuie à une droite fixe OB, tandis que le côté indéfini OM passe par un point fixe O de cette droite. De Sluse s'est occupé de cette courbe, dont l'étude lui avait été proposée par Gutschoven. Voir Œuvres complètes de Christiaan Huygens, t. IV, p. 207.

La courbe ainsi décrite a pour équation polaire

$$r = a \cot g\, \theta.$$

On voit que c'est la courbe désignée dans ce Recueil sous le nom de Cappa.

<u>Courbe de Gutschoven généralisée</u>. — La courbe de Gutschoven, généralisée par de Sluse, est la courbe mécanique lieu du sommet M de la fausse équerre, c'est-à-dire d'un angle constant $OMB = \alpha$, autre qu'un angle droit.

La courbe ainsi tracée a pour équation polaire

$$r = a \frac{\sin(\alpha + \theta)}{\sin \theta}.$$

Voir Courbe de Gutschoven.

<u>Courbe dégénérée</u>. — Comme exemples de courbes dégénérées, ou de dégénérescence de courbes, on peut citer ceux de coniques

dégénérées en deux droites ou en couples de deux droites, et de coniques dégénérées en deux points ou en un couple de points. Ce couple de points peut être considéré comme la limite d'une conique qui s'aplatit graduellement, de manière à tendre vers un segment de droite. Les tangentes à la conique s'approchent de plus en plus de droites passant par les extrémités du segment.

On a quelquefois donné à ces coniques le nom de variété évanouissante.

Voir courbe évanouissante ou de transition.

<u>Courbe de niveau</u>. — Courbe sur laquelle un point matériel soumis à des forces données est toujours en équilibre.

Soient X la somme des projections sur l'axe des x de toutes les forces données, Y, Z les quantités analogues pour les deux autres axes coordonnés; dx, dy, dz les composantes d'un déplacement virtuel effectué sur la courbe de niveau. Le travail sera

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

En vertu du principe des vitesses virtuelles, ce travail doit être nul s'il y a constamment équilibre. La condition de la courbe de niveau est donc

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

Cette relation correspond à une infinité de courbes qui, ont pour lieu une surface. On voit donc qu'en général le lieu des positions d'équilibre d'un point soumis à des forces données est une surface. C'est la surface de niveau. S'il existe une fonction des forces, elle a sur cette surface une valeur constante.

Toutefois la considération des courbes de niveau est utile quand le point matériel soumis aux forces données est assujéti à une condition quelconque. Par exemple, si ce point doit rester sur une surface sur laquelle il peut glisser sans frottement, le lieu de ses positions d'équilibre est une courbe tracée sur cette surface, courbe par laquelle passe évidemment, la surface de niveau sur laquelle le point matériel donné serait partout en équilibre s'il était complètement libre.

Dans le cas d'un point assujéti à rester sur une surface et soumis à la seule action de la pesanteur, les courbes de niveau sont les intersections de la

surface considérée et de plans horizontaux quelconques. Ces courbes sont très employées en topographie, où elles ont reçu la dénomination de lignes de niveau.

Pour plus de détails, voir le Traité de Mécanique de P. Appell, ainsi que le Recueil d'Exercices de St Germain pour de nombreuses applications.

Courbe harmonique. — Considérons, sur une surface donnée, un système quelconque de coordonnées curvilignes.

Les courbes harmoniques de la surface forment sur celle-ci deux familles telles qu'en leurs points de croisement leurs tangentes forment un faisceau harmonique avec les tangentes aux lignes coordonnées.

Par exemple, les lignes asymptotiques sont les courbes harmoniques des lignes de courbure, et réciproquement. Cela résulte de ce que les axes de l'indicatrice et ses asymptotes forment un faisceau harmonique.

Courbe de Jerabek. — Cette courbe est l'inverse (d'Hirst) du cercle O par rapport au point cercle A.

Voir aussi, question 1122 (M. 1897, p. 127; V. Retali).

Courbe de Kiepert. — Courbe sphérique dont les arcs peuvent représenter toute intégrale elliptique de 1ère espèce.

En coordonnées cartésiennes, elle a pour équations

$$\frac{x}{\sqrt{au+a_1}} = \frac{y}{\sqrt{bu+b_1}} = \frac{z}{\sqrt{cu+c_1}} = \frac{1}{u},$$

où a, b, c, a_1, b_1, c_1 sont des constantes et

$$\frac{1}{u} = x^2+y^2+z^2.$$

La courbe en question peut aussi être considérée comme l'intersection du cône quadrique

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c} = 3(x^2+y^2+z^2)$$

avec la surface du quatrième ordre (podaire ou inverse d'un ellipsoïde par rapport au centre, surface d'élasticité de Fresnel)

$$\frac{x^2}{b-c}+\frac{y^2}{c-a}+\frac{z^2}{a-b} = 2(x^2+y^2+z^2)^2.$$

Elle est aussi l'inverse d'une hyperbole particulière plane par rapport à un certain point situé sur la perpendiculaire menée par son centre à son

plan.

Lorsque la surface sphérique dégénère en le plan xOy, la courbe de Kiepert se réduit à la lemniscate de Bernoulli.

Voir les ouvrages de L. Kiepert:
De curvis quarum arcus integralibus ellipt. I generis exprimuntur. — Berol. 1870.
Curven deren Bogen e. ellipt. Integral. I. Gattung ist. — Berlin. 1874.

Courbe de latitude. — Voir Clebsch-Lindemann, Leçons de Géométrie, t. II de la traduct. franç. p. 370.

Courbe de plissement. — Voir un mémoire de J. D. van der Waals: Sur les caractères qui décident de l'allure de la courbe de plissement dans le cas d'un mélange de deux substances (Ac. des Sc. d'Amsterdam. — Verslag der Zittingen, etc. t. IV. 1895-1896, pp. 20-30, 82-93; trad. franç. dans les Archives néerland. t. XXX, pp. 266 et 278).

Dans le cas d'un mélange de deux substances dont la température et la pression ont été déterminées de manière que les deux phases coexistantes se correspondent en composition et en densité, on donne le nom de courbe de plissement à la ligne qui fait connaître la relation entre ces valeurs de température τ et de pression p pour des degrés variables x et $(1-x)$ de composition. Ce nom fait allusion à la circonstance qu'un mélange se trouve dans la condition indiquée, si par son volume V et par sa composition $x, (1-x)$ il occupe la place du point de plissement sur la surface ψ.

On n'a pas encore établi l'équation de cette courbe, mais la théorie en donne l'équation différentielle dans la forme

$$\frac{dp}{d\tau}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2_{p,\tau}} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2_{p,\tau}},$$

où η représente l'énergie.

Voir B. D. 1898, 2e pie pp. 92-93.

Courbe de roulis. — Pour des courbes de roulis obtenues par la photographie, voir C. R. t. LXXX, p. 380; 1875. Huet.

Courbe de Schooten. — Voir Curva Schootenii.

Courbe de Siebeck. — Les courbes ainsi désignées sont des courbes planes du quatrième ordre, ou quartiques, bicirculaires, douées de deux axes de symétrie.

Toute cyclique plane, du quatrième ordre, est la transformée par rayons vecteurs réciproques d'une courbe de Siebeck.

Voir Journal de Crelle, t. LVII, p. 359 et t. LIX, p. 173 : Ueber eine Gattung von Curven vierten Grades, welche mit den elliptischen Functionen zusammenhängen.

Courbe des points circulaires. — Courbe qui se présente dans l'étude du mouvement d'un plan qui glisse sur lui-même.

Voir une note de M. Grübler (Zeits. f. Math. u. Physik. t. XXXVII. 1892, p. 35-56)

Soient E_1, E_2, E_3, E_4 quatre positions d'un plan E qui se meut dans un plan E_0. Burmester a démontré que les points A de E dont les positions correspondantes A_1, A_2, A_3, A_4 appartiennent à un cercle, se trouvent sur une courbe du troisième ordre passant par les six points qui se correspondent à eux-mêmes dans les quatre plans pris deux à deux et par les points circulaires à l'infini. Les centres de ces cercles forment également une courbe du troisième ordre de E_0 qui possède des propriétés analogues.

Ce sont les courbes étudiées dans la note susmentionnée.

Voir B.D. 1898, 2e pie p. 85.

Courbe de Wallis. — Voir Œuvres Complètes de Christiaan Huygens, t. I.

L'équation de cette courbe s'écrit

$$y = 1 \times \frac{6}{1} \times \frac{10}{2} \times \frac{14}{3} \times \cdots \times \frac{2x}{\frac{1}{2}(x-1)}.$$

La question de savoir si c'est là une courbe bien déterminée a donné occasion à une correspondance intéressante entre Christiaan Huygens, van Schooten et Wallis.

La formule, ainsi écrite, ne donne de valeurs bien définies pour y que dans le cas où x est un nombre entier impair $\geqq 3$. Pour $x=1$, Wallis, nonobstant la formule du dernier facteur (qu'il ne donne pas explicitement d'ailleurs) considérait l'unité comme la valeur de y et il soutenait qu'il y avait une interpolation authentique permettant de calculer la valeur de y pour les valeurs

de x intermédiaires entre 1, 3, 5, etc.

Plus tard, dans son *Arithmetica infinitorum* (1655), proposition 192, il définit la même courbe d'une manière un peu différente, qui revient à écrire

$$y = 1 \times \frac{6}{1} \times \frac{10}{2} \times \dots \times \frac{2x'-2}{\frac{1}{2}x'-1},$$

mais on a simplement $x' = x+1$. Maintenant ce sont les valeurs paires de x' pour lesquelles le nombre des facteurs est limité.

Wallis attache beaucoup d'intérêt à cette courbe, qui intervient dans les considérations qui l'ont conduit à sa formule célèbre pour π, comme produit d'un nombre infini de facteurs. D'après lui, π est la valeur de y pour $x' = 3$.

Notes : I. – La courbe de Wallis se rencontre aussi dans les Œuvres de Fermat, Édon P. Tannery, t. III, p. 350.

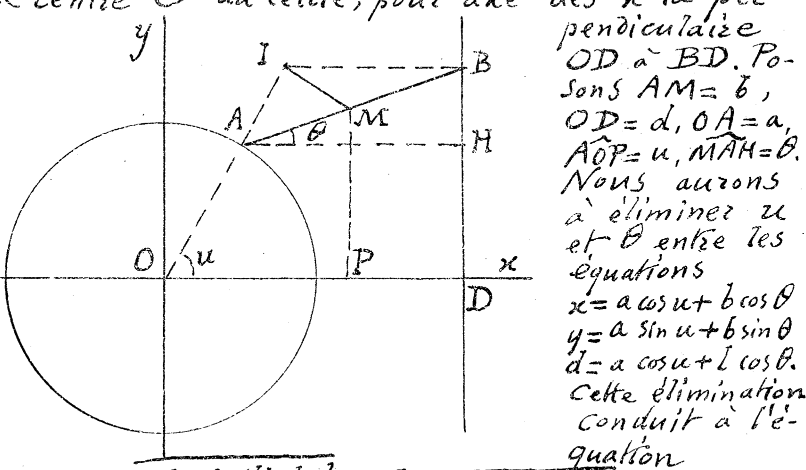
II. – La formule de Wallis est, comme on sait :

$$\frac{\pi}{2} = \lim. \frac{2.2.4.4.6.6.\dots 2n-2.\ 2n-2.\ 2n}{1.\ 3.\ 3.\ 5.\ 5.\ 7 \dots 2n-3.\ 2n-1.\ 2n-1},$$

pour n infini.

<u>Courbe de Watt</u>. – Un cas particulier des courbes de Watt est celui des courbes décrites par des points d'une bielle appuyée à ses extrémités à une droite fixe et à un cercle fixe.

Soit BD cette droite. Prenons pour origine le centre O du cercle, pour axe des x la perpendiculaire OD à BD. Posons $AM = b$, $OD = d$, $OA = a$, $\widehat{AOP} = u$, $\widehat{MAH} = \theta$. Nous aurons à éliminer u et θ entre les équations



$$x = a\cos u + b\cos\theta$$
$$y = a\sin u + b\sin\theta$$
$$d = a\cos u + l\cos\theta.$$

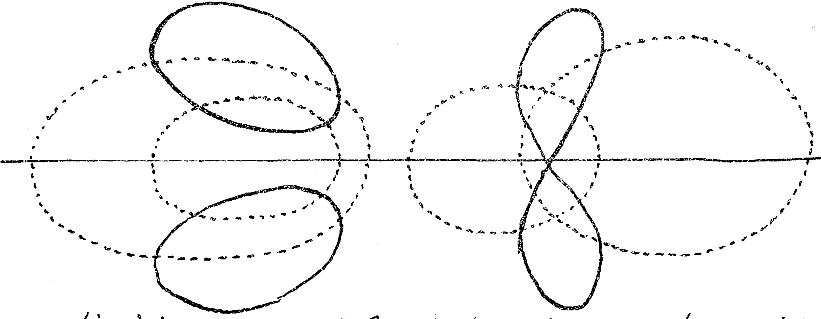
Cette élimination conduit à l'équation

$$y = \frac{\sqrt{a^2(l-b)^2 - (db-lx)^2}}{l-b} + \frac{b}{l-b}\sqrt{(l-b)^2 - (x-d)^2}.$$

On voit que l'ordonnée d'un point quelconque du lieu est la somme algébrique des ordonnées de deux ellipses qui ont leur grand axe sur Ox.

On peut donc obtenir très simplement toutes les formes que le lieu du point M peut affecter. En voici quelques unes figurées ci-après, en même temps que les ellipses auxiliaires.

Le centre instantané de rotation I de AB est à l'intersection I de OA prolongé et de BI per-

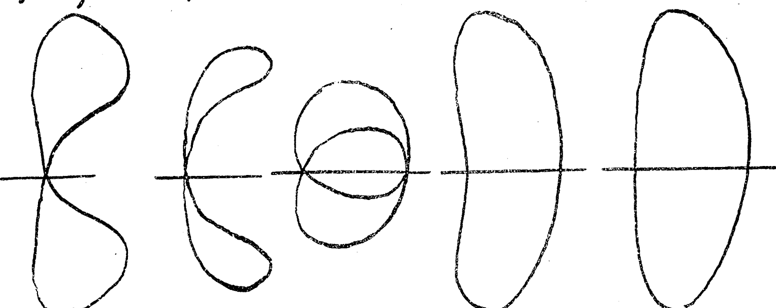


pendiculaire à BD. IM est donc la normale en M.

Voir Journal de Math. spéciales. Montpellier. 1870. n^os des 15 avril et 1er août. (H. Brocard)

La même question a été étudiée plus en détail dans un mémoire de José Ruiz Castizo Ariza : Estudio analítico de un lugar geométrico de cuarto orden (1889, 93 pages, 13 figures. Madrid).

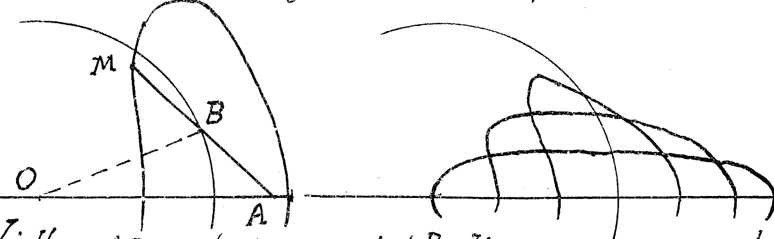
Dans son Mémoire : Essai d'une théorie du parallélogramme de Watt (Mém. de la Soc. roy. des Sc., Agr., et Arts de Lille, 1837) A.-J.-H. Vincent examine diverses courbes produites suivant certaines dispositions du mécanisme et dont voici quelques spécimens. Il donne aux deux dernières



les noms de sélénoïde et d'hémicycle. Leurs

équations sont du 4e degré. L'hémicycle est un cas particulier de la sélénoïde, lorsque celle-ci n'a pas de points d'inflexion. Vincent ajoute que ces courbes conviendraient à la décoration d'un fronton.

Déjà Bérard en 1820, dans ses Opuscules mathématiques, avait remarqué des courbes analogues comme forme et bien plus faciles à construire: ce sont les trajectoires des points M d'une



bielle ABM dont un point B glisse sur un cercle fixe et l'autre A glisse sur une droite passant par le centre de ce cercle (Cas particulier de $d=0$ dans l'analyse précédente).

A la bibliographie déjà donnée de la courbe de Watt, ajouter N. A. 1850, pp. 143-144. (Watelet).

<u>Courbe de Weierstrass.</u> — Les lignes ainsi désignées sont des courbes qui, dans un intervalle arbitrairement petit, présentent un nombre infini d'oscillations, pour lesquelles une corde unissant deux points infiniment rapprochés décrit un angle qui peut être nul ou égal à deux angles droits (Voir Journal de Crelle, t. LXIX, pp. 29 et suiv. P. du Bois Reymond; t. XC, pp. 221 et suiv. Ch. Wiener).

<u>Courbe d'involution.</u> — Étant donnée, sur une courbe unicursale de l'ordre m, une involution de degré n, l'enveloppe des droites qui unissent un point de la courbe à ses $(n-1)$ correspondants est dite courbe d'involution. Elle est de la classe $(m-1)(n-1)$, touche la courbe donnée en $3(n-1)(m-2)$ points, a en commun avec elle les tangentes aux $2(n-1)$ points doubles de l'involution, et $2(n-1)(m-2)(m-3)$ autres tangentes. Par exemple, l'enveloppe des droites qui joignent les couples de points conjugués d'une involution quadratique placée sur une cubique unicursale est une conique tangente à la cubique en 3 points, et ayant avec elle en commun les tangentes aux 2 points doubles de l'involution.

Voir Herm. Wiener. Involutions sur les courbes planes. München. 1881, ainsi que les travaux d'Emil Weyr.

<u>Courbe discontinue</u>. — Courbe représentée par une équation dont le premier membre est une fonction discontinue.

Une fonction est discontinue lorsqu'une variable y entre à l'état d'exposant d'une quantité ou fonction négative ou susceptible de devenir négative. Ainsi, la fonction

$$y=(a^2)^x$$

est une courbe continue, mais les fonctions

$$y=(-a^2)^x, \quad y=(a-x)^x$$

sont discontinues.

Il en est de même pour les courbes représentées par ces équations.

Elles sont caractérisées géométriquement par ce fait que sur un arc fini, mais aussi petit que l'on voudra, on peut trouver une infinité de points appartenant à la courbe et une infinité de points ne lui appartenant pas.

Pour diverses remarques à ce sujet, voir I. M. 1897, pp. 176-178. (L. Ripert).

<u>Courbe d'ordre m</u>. — Courbe algébrique dont l'équation est de degré m.

L'ordre m d'une courbe est invariable, il est le nombre de points d'intersection (réels ou imaginaires, à distance finie ou à l'infini) de la courbe avec une sécante arbitraire.

Dans l'espace, l'ordre m d'une courbe est le produit des degrés de ses deux équations ponctuelles.

<u>Courbe du couple</u>. — Soit ABOO' un quadrilatère articulé dont OO' est un côté fixe, le côté AB s'appelle le couple et Burmester nomme courbe du couple le lieu décrit par un point d'un plan invariablement lié à AB. Cette courbe passe trois fois par les points cycliques et possède, en général, trois points doubles à distance finie.

C'est, en définitive, une courbe de Watt, ou une généralisation de la courbe de Watt.

Pour des études de la courbe du couple, voir Zeits. f. M. u. Phys. t. XXXIV, 1889, 303-305, 372-375 ; t. XXXVI, 1891, 11-20, 65-70 (Müller).

<u>Courbe du danseur de corde</u>. — Courbe étudiée par Bérard (Opuscules mathématiques, 1810).

et qui peut se définir le lieu des pieds M d'un homme marchant sur la corde AMBP attachée en A, tendue par un poids P et passant sur une petite poulie B. L'équation de cette courbe est de la forme

$$y^2[a-(1-x)^2] = x^2(b-x)^2.$$

Courbe du chien. — Le problème de la courbe du chien est traité dans les Mémoires de l'Académie de Metz pour 1859 par Gosselin.

Courbe du diable. — Mentionnée dans l'ouvrage de Cramer : Introduction à l'analyse des courbes algébriques.

Courbe du réverbère. — La courbe décrite par un réverbère M suspendu par une poulie P à une corde APB fixée en A et tirée en B sur une poulie B est une hyperbole (A. Comte).

Note. — Les deux points A et B doivent être à des hauteurs différentes, sans quoi le lieu de M serait une verticale médiane des deux verticales A et B.

Courbe élastique. — La courbe élastique a été mentionnée par Jacques Bernoulli déjà à la p. 207 des Acta Eruditorum (1692); ensuite elle fut étudiée par lui dans deux notes:

Curvatura laminæ elasticæ. Ejus identitas cum curvatura lintei a pondere fluidi expansi (Acta Eruditorum, 1694, pp. 262-276).

Explicationes .... ad quæ .... de curva elastica, isochrona paracentrica, et velaria .... leguntur (Ibid, 1695, pp. 537-553).

Voir aussi une étude de Jacques Bernoulli (Mém. de l'Ac. des Sc. pour 1703, p. 386).

Courbe elliptique. — Pour un résumé de la bibliographie des courbes elliptiques, voir Gino Loria (Teorie geom. 1896, p. 78):

O. Schlesinger. — Ueber elliptische Curven in der Ebene (Math. Annalen, t. XXXIII et XXXIV, 1889).

C. Segre. — Rem. sur les transf. unif. des courbes ellip. en elles-mêmes (Math. Annalen, t. XXVII, 1886).

C. Segre. — Li corrisp. univoche sulle curve ellit

(Torino Atti, t. XXIV, 1889).

G. Castelnuovo. – Geom. sulle curve ellittiche (Ibid).

S. Kantor. – Les corresp. dans les courbes ellipt., déduites géom. (Ibid, t. XXIX, 1894).

Courbe en coeur. – Courbe imitant la forme d'un cœur, comme cela se présente assez imparfaitement il est vrai, pour la cardioïde, mais mieux pour les courbes dites piriformes (voir ce mot). On rencontre de nombreux exemples de courbes en cœur en discutant l'équation de la famille de quintiques

$$y^2 = x \pm \sqrt{\frac{x^2+px+q}{x+r}}.$$

Par exemple, la courbe

$$y^2 = x \pm \sqrt{\frac{x^2-4x+3}{x-2}}$$

a la forme représentée ci-contre.

Voir : E. Catalan (Manuel des Candidats à l'Ecole Polytechnique).

Courbe en œuf. – Courbe imitant la forme d'un œuf, comme cela se présente pour le folium simple (voir ce mot), et pour les ovales de Cassini.

Les courbes en œuf sont dites aussi Courbes ovoïdes.

On en rencontre de nombreux exemples en discutant l'équation de la famille de quintiques

$$y^2 = x \pm \sqrt{\frac{ax^2+bx+c}{x+d}}.$$

Voir aussi Courbe en cœur.

Note. – Les dénominations de Courbe en cœur, Courbe en œuf, sont empruntées à l'Architecture, mais leur emploi en Géométrie n'est pas moins justifié.

Courbe équitangentielle. – Pour définir une courbe U comme tractrice, il suffit de construire la courbe V, lieu des extrémités des segments égaux à une longueur donnée a, portés sur les tangentes à U à partir du point de contact.

Si l'on inscrit dans une courbe V une corde

AB de longueur 2a ayant son milieu en M, il est évident que, dans le déplacement des points A, B sur la courbe V, le point M engendrera la courbe U.

Ainsi la courbe U est le lieu des milieux M des cordes de longueur 2a inscrites dans la courbe V. On voit encore que la courbe U est l'enveloppe des cordes de longueur 2a inscrites dans la courbe V.

La courbe U est dite l'équitangentielle de la courbe V.

Si la courbe V est une ligne droite, la courbe U est la tractrice (voir ce mot) ou la courbe aux tangentes égales. Dans ce cas, le point A, par exemple, décrit une ligne droite, et le point B, une syntractrice (voir ce mot).

<u>Courbe évanouissante</u>. – Courbe fermée qui se réduit à un point ou à un système de points. Ainsi, l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

représente un point (dit ellipse évanouissante); l'équation décomposable

$$(x^2+y^2+c^2)^2 - 4c^2x^2 = 0$$

représente deux points (ovale de Cassini évanouissant). (Voir Ovale de Cassini).

Une courbe évanouissante est ordinairement la courbe de transition entre une courbe réelle fermée et une courbe imaginaire. Ainsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

est la courbe de transition entre

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \varepsilon^2 = 0$$

et

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon^2 = 0.$$

<u>Courbe fermée</u>. – Courbe dépourvue de branches infinies et par suite, ne rencontrant la droite de l'infini, qu'en des points imaginaires. Si, dans l'équation d'une courbe algébrique de degré m, le polynome homogène de degré m n'a que des racines imaginaires, la courbe est soit imaginaire, soit réelle ou fermée. On sait qu'elle est réelle et fermée dès qu'on en a déterminé un point réel, et qu'elle est imaginaire dès qu'on a pu démontrer qu'aucune valeur réelle des coordonnées ne satisfait à l'équation.

Les courbes fermées ne peuvent être que de degré pair ; elles admettent comme variétés les courbes évanouissantes (Voir ce mot).

<u>Courbe focale</u>. – Lieu de foyers d'une courbe algébrique quelconque.

<u>Courbe fondamentale</u>. – Dans une transformation de Cremona, à un point fondamental d'ordre K, sur l'un des deux plans, correspond dans l'autre plan une courbe de genre zéro et d'ordre K ; on appelle ces courbes, fondamentales ou principales.

Les courbes fondamentales d'un plan ont leurs points multiples aux points fondamentaux du même plan et elles ne se coupent qu'aux points fondamentaux.

Les courbes fondamentales d'un plan forment par leur ensemble la jacobienne du réseau (omaloïde) formé par les courbes images des droites de l'autre plan.

Voir G. Salmon, Courbes planes, pp. 439-453.

<u>Courbe funiculaire</u>. – Le problème de trouver la courbe funiculaire fut proposé par Jacques Bernoulli dans les Acta Eruditorum (1690, p. 219) et des solutions en furent données dans l'année 1691 du même Recueil par Jean Bernoulli (p. 274-276), Leibniz (p. 277-281, 435-439) Huygens (p. 281-282) et Jacques Bernoulli lui-même (p. 288-290).

La chaînette était la courbe cherchée.

<u>Courbe géodésique</u>. – On peut créer sur les surfaces une géométrie ayant la plus grande analogie avec la géométrie plane. Il suffit pour cela de remplacer les droites du plan par les lignes géodésiques de la surface considérée.

On est ainsi amené à construire des courbes géodésiques qui correspondent à des courbes planes déterminées. Ainsi, le lieu des points d'une surface dont la distance géodésique à un point fixe de cette surface est constante est un cercle géodésique (Voir ce mot). C'est une courbe dont les propriétés rappellent absolument celles du cercle plan.

De même, le lieu des points d'une surface dont les distances géodésiques à deux points fixes nommés foyers pris sur cette surface ont une somme constante est une ellipse géodésique (Voir ce mot).

C'est encore une courbe dont les propriétés rappellent absolument celles de l'ellipse ordinaire.

L'étude de cette géométrie générale a été commencée par Gauss. Son point de départ a consisté à imaginer des coordonnées curvilignes λ et μ, choisies de telle façon que les lignes $\lambda = C^{te}$ fussent des géodésiques ordinaires passant par un point fixe O de la surface et que les lignes $\mu = C^{te}$ fussent des cercles géodésiques ayant O pour centre.

Au début de la théorie on rencontre des triangles et polygones géodésiques, présentant des propriétés tout à fait analogues à celles des triangles et polygones plans, comme on en peut juger par les théorèmes suivants :

La Somme des angles d'un triangle géodésique est égale à sa courbure totale, augmentée de deux droits.

La somme des angles d'un polygone géodésique est égale à sa courbure, plus autant de fois deux droits qu'il a de côtes moins deux.

(H. Laurent, Traité d'Analyse, t. VII, p. 115).

Note. – Dans le présent Recueil, les courbes désignées sous le nom de cercle géodésique et d'ellipse géodésique sont étudiées à part uniquement à cause de leur importance spéciale, mais il ne serait guère logique d'étendre cette nomenclature à d'autres courbes en les qualifiant de géodésiques.

<u>Courbe hyperbolique</u>. – Courbe ayant au moins une branche infinie hyperbolique, c'est-à-dire pourvue d'une asymptote.

Dans une courbe algébrique, une branche hyperbolique se divise toujours en deux demi-branches, car, s'il en était autrement, la courbe présenterait un point d'arrêt à l'infini et ne pourrait être une courbe continue. (Voir ce mot).

Lorsque l'asymptote d'une branche hyperbolique s'éloigne à l'infini, la branche devient parabolique.

Une asymptote peut être simple ordinaire (hyperbole), simple d'inflexion (cissoïde), double nodale, double de rebroussement de 1ère ou de 2ème espèce, double et isolée, multiple de divers degrés et de dispositions diverses (Voir les Traités de Géométrie analytique).

<u>Courbe hermitienne</u>. – Voir Hermitienne.

<u>Courbe hyperelliptique</u>. – Pour un résumé de la bibliographie des courbes hyperelliptiques, voir Gino Loria (Teorie geom. 1896, p. 79):

Brill. – Ueber diejenigen Curven, deren Coordinate, sich als hyperell. Funct. eines Param. darstellen lassen (J. de Crelle, t. LXV, 1866).

Cremona. – Sulla trasform. delle curve iperellit. (Rendic. Ist. Lomb. II(2), 1869)

Clebsch. – Ueber die Curven, für welche die Classe der zugehörigen Abel'schen Functionen $p=2$ ist. (Math. Ann. I. 1869).

Bobek. – Ueber hyperell. Curven (Wiener Ber. XCIII, 1886; XCXIV, 1887; Math. Ann. XXIX, 1887); Ueber Dreischarcurven (Wiener Ber. XCVIII, 1889).

Küpper. – (Hyperell. C³n Hierzu ein Anhang von K. Bobek). (Prager Abh. VII. 1887).

S. Kantor. – Sur les courbes hyperell. portant des correspondances univoques (Palermo Rend. IX. 1895).

<u>Courbe hypergéométrique</u>. – Voir les Œuvres d'Euler.

<u>Courbe imaginaire</u>. – Expression employée pour interpréter géométriquement une équation de courbe qui ne peut être vérifiée par des valeurs réelles des coordonnées. Ainsi, l'équation

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

représente une courbe imaginaire, que l'on appelle par convention ellipse imaginaire et que l'on considère comme conjuguée de l'ellipse réelle

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

L'équation (1) ayant ses coefficients réels, la courbe imaginaire qu'elle représente est dite de la première espèce.

Cette ellipse imaginaire est conjuguée à toute conique réelle par rapport à un point qui lui est intérieur (Voir Conique conjuguée)

Une conique imaginaire de la première espèce n'a aucun point réel; au contraire, une conique imaginaire de la deuxième espèce a en général quatre points réels.

Une application importante des coniques conjuguées est précisément la représentation des coniques imaginaires par leurs conjuguées réelles.

<u>Courbe intertransendante</u>. – Courbe

l'équation cartésienne renferme des variables affectées d'exposants incommensurables ; par exemple $y = x^{\sqrt{2}}$. En substituant à $\sqrt{2}$ la suite des réduites qui représentent ses valeurs approchées, on a une série de courbes algébriques dont le degré croît constamment et qui ressemblent de plus en plus à la figure de la courbe cherchée.

Voir G. Salmon. Courbes planes. p. 385, où la notion de ces équations particulières est attribuée à Leibniz.

<u>Courbe inverse</u>. — La définition de courbe inverse est à rapprocher de celle de l'inversion.

Si x, y sont les coordonnées rectangulaires d'un point M, celles de son inverse M' sont

$$x' = \frac{K^2 x}{x^2+y^2}, \quad y' = \frac{K^2 y}{x^2+y^2}.$$

C'est le cas le plus simple des transformations quadratiques birationelles, auquel peuvent se ramener tous les autres.

Si m est l'ordre d'une courbe ayant en chacun des points circulaires à l'infini un point multiple de degré de multiplicité p, et le pôle de degré de multiplicité q, les nombres analogues pour la courbe inverse auront pour valeurs

$$p' = m - p - q.$$
$$q' = m - 2p.$$
$$m' = 2m - 2p - q.$$

Exemples de courbes inverses. — L'inverse d'une conique quelconque est une quartique bicirculaire ayant un troisième point double au pôle. Si la conique passe par le pôle O, son inverse est une cubique circulaire ayant un point double en O ; si le pôle est un foyer, l'inverse d'une conique à centre est le limaçon de Pascal ; l'inverse d'une parabole est la cardioïde ; l'inverse de l'hyperbole équilatère par rapport au centre est la lemniscate de Bernoulli.

L'inverse de la rosace à quatre branches, par rapport au centre, est la Kreuzcurve circulaire, c'est-à-dire la polaire réciproque de l'astroïde.

L'inverse du cappa par rapport au centre est la même courbe, tournée de 90°.

L'inverse du folium simple par rapport au point triple est une cubique duplicatrice.

L'inverse d'une strophoïde (droite) par rap-

port au point double est le trifolium (droit).

L'inverse de la parabole par rapport au sommet est la cissoïde de Dioclès.

On multiplierait indéfiniment ces exemples. Voir aussi G. Salmon, Courbes planes, p. 434.

La bibliographie de l'inversion est trop étendue pour trouver place ici; mais il y a utilité à faire mention d'une proposition importante, qui rattache les courbes inverses aux courbes podaires :

La première podaire d'une courbe par rapport au pôle O est l'inverse de la polaire réciproque de la courbe (par rapport à un cercle ayant O pour centre);

Et réciproquement :

L'inverse d'une courbe est la polaire réciproque de sa première antipodaire.

<u>Courbe isochrone.</u> — Le problème de trouver la courbe isochrone a été proposé en 1687 par Leibniz et résolu la même année par Huygens, qui en inséra aussi une solution dans les Acta Eruditorum (1689, p. 195). L'année suivante, Jacques Bernoulli publia dans le même Recueil (p. 217-219, 1690) son Analysis problematis antehac propositi de inventione lineæ descensus a corpore gravi percurrendæ uniformiter.

On sait que la Courbe isochrone est identique à la parabole semi-cubique (développée de la parabole ordinaire).

<u>Courbe isologique.</u> — Voir, N. A. 1864, pp. 97-111. De la transformation géom. des figures planes, et d'un mode de génération de certaines courbes à double courbure de tous les ordres (E. de Jonquières)

L'auteur appelle figures isographiques planes de l'ordre n deux figures telles, qu'à une droite quelconque de la première (F) il correspond, dans la seconde (F') une courbe de l'ordre n, douée d'un point multiple de l'ordre $(n-1)$ en un point fixe O', et passant par $(2n-2)$ autres points fixes.

Cela posé, on a la propriété suivante :

Dans deux figures isographiques, placées d'une manière quelconque, les points de la figure (F'), qui satisfont à la condition que les droites qui les joignent à leurs homologues respectifs dans la

par un même point donné P, sont situés sur une courbe U' de l'ordre n+1, qui passe par le point P et par les points fondamentaux (B') de (F') et qui a un point multiple d'ordre (n-1) au point fixe multiple O' de (F').

Les points correspondants de la figure (F) sont également situés sur une courbe U, de l'ordre n+1, qui passe par le point P, par les points (B) et qui a un point de l'ordre (n-1) en O.

Ces deux courbes U, U' sont dites isologiques, relatives au point P. Leurs points se correspondent un à un et sont situés sur des droites concourantes en un même point.

<u>Courbe isométrique</u>. - Voir Isométrique.

<u>Courbe isopérimétrique</u>. - L. Euler. Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes (1744).

G. Eneström. - Framställning af striden om det isoperimetriska problemet (Upsala Universitets årsskrift. 1876. - Voir le compte rendu, B.D. 1879, 379-380. (Histoire de la querelle au sujet du problème des isopérimètres).

Ce problème, posé par Jacques Bernoulli, a donné lieu à une correspondance avec son frère, Jean Bernoulli, qui se trouve en grande partie dans les Acta Eruditorum et dans le Journal des Sçavans (1697-1701). La solution a été donnée dans un mémoire de Jacques Bernoulli, Analysis magni problematis isoperimetrici (Bâle, 1701).

<u>Courbe isoptique</u>. - Voir Ligne isoptique.

<u>Courbe lintéaire</u>. - Voir Courbe élastique.

<u>Courbe mécanique</u>. - D'après H. Lond (I.M. 1894, p. 154) Cayley a remarqué que les courbes dont les branches imaginaires passent par les points circulaires à l'infini peuvent très souvent être construites par des moyens mécaniques.

Voir I.M. 1895, 391; 1896, 226.

Ce sujet a été traité par A. Cayley, S. Roberts, W. Russell.

La description mécanique des courbes s'est d'ailleurs notablement développée à la suite de l'invention de divers systèmes de compas composés et d'appareils à tiges (inverseur Peaucellier, appareils de Hart. Kempe, Darboux, Sylvester, etc.

Courbe non continue. — Courbe représentée par une équation dont le premier membre est une fonction non continue.

Une courbe algébrique ne peut être non continue.

Une courbe transcendante est non continue si elle présente une solution de continuité dans la succession de ses points, ce qui produit un ou plusieurs points d'arrêt, ou dans la succession de ses tangentes, ce qui produit un point anguleux.

Ainsi la courbe $y \cdot \log x = 1$ a un point d'arrêt à l'origine ; la courbe $y(1+e^{\frac{1}{x}}) = 1$ admet l'origine pour point anguleux.

Courbe oligochrone. — Nom sous lequel a été désignée la brachistochrone. — Jacques Bernoulli. Acta Eruditorum, mai 1697, p. 211.

Courbe orthogonale. — Voir ligne orthogonale.

Courbe orthoptique. — Voir ligne isoptique.

Courbe osculatrice. — Courbe tangente à une courbe donnée en un point donné, et ayant avec elle en ce point le contact de l'ordre le plus élevé qu'elle puisse avoir.

Le contact est dit d'ordre m lorsque les deux courbes ont $(m+1)$ points communs infiniment voisins.

Voir, cercle osculateur, conique osculatrice.

Courbe parabolique. — Courbe ayant une branche infinie parabolique, c'est-à-dire dépourvue d'asymptote rectiligne.

Toutes les courbes de la famille $y = x^m$ sont paraboliques et sont dites paraboles du $m^{ème}$ degré.

La direction de la branche parabolique, ou de la tangente quand le point de contact s'éloigne à l'infini, s'appelle la direction parabolique de la branche ; c'est la direction de l'asymptote, qui est alors rejetée à l'infini.

Une direction parabolique est toujours au moins double, dans une courbe algébrique ; autrement dit, à une branche parabolique correspond toujours dans une telle courbe une branche conjuguée.

Une branche parabolique peut être d'inflexion, de rebroussement de 1ère espèce, ou de rebroussement de 2ème espèce (Voir les traités de Géométrie analytique.).

Courbe parallèle. — La courbe parallèle

à une courbe (C) est l'enveloppe d'un cercle de rayon donné $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=K^2$ dont le centre (α, β) décrit la courbe (C).

La courbe parallèle et la courbe originale ont les mêmes normales et la même développée.

La détermination des courbes parallèles et celle de la podaire négative sont deux problèmes identiques au point de vue de l'analyse. On obtient l'équation de la podaire négative, en remplaçant x par $\frac{x}{2}$, y par $\frac{y}{2}$ et K^2 par x^2+y^2 dans l'équation de la courbe parallèle (Roberts)

Voir G. Salmon, Courbes planes, pp. 146-156. Pour différents exemples, voir Podaire, Toroïde, Courbe de Talbot.

<u>Courbe périplegmatique</u>. — Voir l'ouvrage de Hugo Gyldén, Sur la théorie analytique des planètes.

<u>Courbe plane</u>. — La théorie géométrique des courbes planes, et particulièrement des courbes algébriques, a pris un très grand développement et elle est devenue le sujet d'ouvrages spéciaux, parmi lesquels nous devons signaler celui de G. Salmon, traduction Chemin (Paris, 1884), intitulé : Traité de Géométrie analytique (Courbes planes).

On trouvera dans cet ouvrage de nombreux renseignements bibliographiques.

Il y aurait à rappeler ici les propriétés générales des courbes algébriques et les formules de Plücker établissant les relations entre leurs caractéristiques ; nous les réunirons dans un article spécial, placé aux Annexes.

<u>Courbe pointillée</u>. — La notion de courbe pointillée et de courbe ponctuée a été introduite par Vincent (Annales de Gergonne, t. XV, p. 1 et suiv.). Considérant diverses fonctions transcendantes, de forme exponentielle, comme

$$y=a^x, \quad y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}), \quad y=\sqrt[x]{a}, \quad y=x^x, \quad y=\sqrt[x]{x}, \quad y=\frac{x}{lx},$$

Vincent étudie la continuité des courbes représentées par ces équations.

Dans $y=a^x$, par exemple, les valeurs de x de la forme $\frac{m}{2n}$ donnent deux points de part et d'autre de Ox, tandis que pour les va-

leurs de x de la forme $\frac{m}{2n+1}$, y est réel au-dessus et imaginaire au-dessous de Ox.

En combinant les courbes pointillées, qui correspondent aux valeurs $\frac{m}{2n}$ avec les courbes ponctuées qui ont leurs points en quinconce par rapport à Ox, Vincent obtient des courbes complètes qui ne possèdent plus les singularités des courbes transcendantes. Il ajoute qu'on peut conclure de ses figures qu'il n'y a pas de points d'arrêt dans les courbes transcendantes, pas plus que dans les autres.

Euler (Introd. in. Analysin infinitorum) avait déjà remarqué ces valeurs discontinues de l'expression a^x.

Lacroix (Calcul intégral) observe aussi que la parabole tournant autour de son axe Ox, le calcul intégral assigne un volume produit à gauche du sommet, bien qu'il n'y ait pas de courbe à gauche de ce point.

De même, la développante de la chaînette devrait être simple (d'un seul côté de Ox) et non double (ce qu'est en réalité la tractrice) à moins qu'on n'admette la symétrique de la chaînette, comme Vincent l'indique.

Enfin, A. Aubry (J. S. 1893, p. 186) a signalé la courbe connue sous le nom de courbe à flèches proportionnelles comme rectifiable, bien qu'on ne puisse en définir l'équation.

Des objections ont été faites à la théorie de Vincent, par Gregory, Cayley et G. Salmon. Voir, pour plus de détails, G. Salmon, Courbes planes, pp. 400-402.

__Courbe polygonale.__ — Voir C. R. t. CXXVII. 1898, pp. 1005-1007, une note sur les lignes composées de parties rectilignes (D. Gravé).

Partant de la représentation graphique d'une certaine fonction $y = \omega(x)$ intégrale d'une expression arithmétique, l'auteur montre que les lignes déterminées par cette fonction sont composées d'une infinité de parties rectilignes, ce qui les rapproche des polygones, mais ces lignes ont la propriété essentielle des lignes courbes, d'avoir pour chaque point une tangente bien déterminée qui change de direction d'une façon continue quand le point de contact parcourt la ligne. C'est pourquoi il propose de les appeler

courbes polygonales.

Voir aussi Ligne brisée transcendante.

Courbe polyzomale. — Il semble que Cayley aurait pu désigner ces courbes du nom de courbes polyzonales, puisque ζῶμα, en grec, signifie aussi bien ceinture que ζώνη.

Courbe ponctuée. — Système de points, soit quelconques, soit en ligne droite.

Une courbe ponctuée est essentiellement algébrique ; elle est représentée, soit par une équation tangentielle $f(U, V, R) = 0$, dans laquelle le hessien de la fonction f est divisible par f ; soit par deux équations ponctuelles $f_1(x, y, t) = 0$, $f_2(x, y, t) = 0$.

Une courbe ponctuée de classe m entraîne un système de $\frac{m(m-1)}{2}$ droites de jonction doubles (car elles joignent deux points, essentiellement doubles).

Toute droite passant par un point d'une courbe ponctuée peut être dite tangente à la courbe. A cet égard, les courbes ponctuées correspondent aux courbes gauches, dont l'étude compliquée serait beaucoup facilitée par une étude préalable des courbes ponctuées.

Lorsque tous les points sont en ligne droite, la courbe ponctuée devient un système sur droite de jonction. Le hessien de l'équation tangentielle est alors identiquement nul, et l'une des équations ponctuelles est linéaire (équation de la droite de jonction).

Les systèmes droits correspondent, du plan à l'espace, aux courbes planes.

La corrélative d'une courbe ponctuée est une courbe rectiligne (voir ce mot).

Pour une autre acception, voir Courbe pointillée.

Courbe principale. — Dans la théorie générale de la transformation rationnelle, un système de valeurs de (x, y, z) a pour correspondant un seul système de valeurs (x', y', z') (par exemple, $x' : y' : z' = U : V : W$, où U, V, W sont des fonctions connues de x, y, z, supposées du $n^{ème}$ ordre).

Les courbes d'un système qui correspondent aux points principaux de l'autre système peuvent être appelées courbes principales, et ces courbes prises ensemble constituent la jacobienne du système de courbes $aU + bV + cW$.

Voir G. Salmon, Courbes planes, pp. 439-450.

Courbe réciproque. — Lieu des points réciproques d'une courbe donnée par rapport à un triangle donné.

Soient ABC le triangle de référence, et M un point de son plan. Les droites menées de A, B, C aux symétriques, par rapport aux milieux des côtés, des points où AM, BM, CM coupent ces côtés, se rencontrent en un même point M' qui est nommé le réciproque (ou le conjugué isotomique) du point M.

Si α, β, γ sont les coordonnées du point M, celles de son réciproque sont $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$. L'équation barycentrique de la courbe donnée étant $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, celle de la courbe réciproque sera $f(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}) = 0$ ou $f(\beta\gamma, \alpha\gamma, \alpha\beta) = 0$.

On peut répéter pour les courbes réciproques tout ce qui a été dit pour les arguésiennes (voir ce mot) (voir aussi Cubique anallagmatique).

On peut également appeler courbe réciproque tangentielle l'enveloppe des réciproques des tangentes à une courbe donnée par rapport à un triangle donné.

A toute droite du plan, $\Sigma UX = 0$ correspond une droite réciproque $\Sigma \frac{X}{U} = 0$.

A toute courbe donnée, en coordonnées tangentielles barycentriques, par une équation $f(U, V, W) = 0$, correspond une réciproque tangentielle dont l'équation est $f(VW, UW, UV) = 0$.

Lorsque la courbe est de 3e classe (et dans ce cas seulement), il peut arriver que les deux équations soient identiques ; la courbe (ou cubique) est alors dite anallagmatique. (Voir ce mot).

Dans une autre acception, le nom de courbes réciproques a été donné aux courbes transformées par polarité relative à une conique ou plus simplement à un cercle. Le degré de la courbe réciproque est le même que celui de la classe de la courbe donnée, et réciproquement. En outre, les points et tangentes multiples ont une correspondance analogue sur les deux courbes.

Pour ces courbes réciproques, voir G. Salmon, Courbes planes, p. 90 et 109.

Courbe rectiligne. — Système de droites, polygone ou faisceau.

Une courbe rectiligne (comme une courbe ponctuée) est essentiellement algébrique. Elle est représentée, soit par une équation ponctuelle $f(x, y, t) = 0$, dans laquelle le Hessien de la fonction f est divisible par f, soit par deux équations tangentielles $f_1(U, V, R) = 0$, $f_2(U, V, R) = 0$.

Une courbe rectiligne de degré m a un système de $\frac{m(m-1)}{2}$ points doubles (les points d'intersection de ses droites). La tangente y est constante en tous les points d'une même droite.

Ainsi, les courbes rectilignes correspondent aux surfaces développables.

Lorsque toutes les droites concourent en un même point, la courbe rectiligne devient un faisceau, dont ce point est le sommet. Le hessien de l'équation ponctuelle est alors identiquement nul, et l'une des équations tangentielles est linéaire (équation du sommet).

Les faisceaux correspondent, du plan à l'espace, aux surfaces coniques.

La corrélative d'une courbe rectiligne est une courbe ponctuée (voir ce mot).

Courbe synchrone. — La première étude d'une courbe méritant le nom de courbe synchrone a été faite par Jean Bernoulli, en 1697, dans les Acta Eruditorum (Leipzig). La courbe en question était le lieu des positions de points matériels identiques, soumis à l'action de la pesanteur et partis ensemble du point A où coïncidaient les points de rebroussement de différentes cycloïdes ayant toutes une même base horizontale AB. Il est facile de voir qu'au bout d'un temps t, les points qui décrivent les cycloïdes données ont des positions $M_1, M_2, M_3, \ldots$ dont le lieu est une trajectoire orthogonale des cycloïdes précitées.

Ce problème particulier fut bientôt généralisé par Euler.

Étant données dans un plan une infinité de courbes C qui passent par un point O et dont l'équation ne dépend que d'un paramètre, si, de plus, à partir de O, avec une vitesse donnée V_0 et sous l'action de forces identiques entre elles, mais

d'ailleurs absolument quelconques, on lance sur ces courbes, des points matériels semblables, le lieu géométrique de leurs positions, au bout du temps t, est une courbe synchrone des courbes considérées.

Une étude a également été faite des courbes synchrones, définies par la condition que les arcs comptés à partir d'une origine fixe soient parcourus dans le même temps que les cordes correspondantes (G. Fouret, Mémoire sur certains mouvements dans lesquels les arcs d'une même courbe plane comptés à partir d'une origine fixe sont parcourus dans le même temps que les cordes correspondantes). (Journal de l'École polytechnique, LVI[e] cahier, 1886).

<u>Courbe synodale</u>. — Étant donnés une courbe (C) fixe et deux points fixes A et B de cette courbe, imaginons un point matériel qui se meut de A en B, dans un temps t, sous l'influence d'une force dérivant d'un potentiel quelconque. En général, il existe d'autres lignes passant par A et B et que, sous l'action de la force considérée, le point matériel en question peut parcourir de A en B dans le temps t. Ces lignes sont les courbes synodales de la courbe (C).

Le problème a été étudié d'une façon très générale par G. Fouret (C. R., t. CIII; 6 et 13 déc. 1886) et par A. de St Germain (B. D; 1889, 1re P.: pp. 257-264: Sur les courbes synchrones). Des cas particuliers sont connus depuis longtemps. Par exemple:

La courbe qu'il faut tracer, dans un plan vertical, à partir d'un point O, pour qu'un mobile pesant abandonné sur cette courbe, en O, sans vitesse, arrive en un point quelconque M de cette courbe, dans le même temps que s'il avait été assujetti à glisser sur la corde OM, est une lemniscate de Bernoulli (Euler, Mécanique, t. II, 1736. — Saladini, Mem. del. Istituto nazionale italiano. 1804).

La lemniscate possède encore la même propriété quand on remplace la pesanteur par une attraction issue de O et proportionnelle à la distance (O. Bonnet, Journal de Liouville, t. IX, p. 116, 1844).

Pour plus de détails, voir: P. Appell, Traité de

Mécanique, Ch. XI et Exercices.

Courbe synoptique. — Dénomination proposée par miss Ch. A. Scott (A. F. 1897. St Etienne, 1ère p^ie p. 174 ; 2ème p^ie pp. 50-59) dans l'étude de la transformation des courbes planes.

Dans l'examen d'une transformation, trois courbes sont utiles à considérer.

1° La jacobienne.

2° La courbe synoptique, autrement dit, polaire réciproque de la Crémonienne du réseau.

3° La courbe complémentaire de la jacobienne, (ou cojacobienne).

La courbe synoptique est une variété de la courbe appelée curva limité par de Paolis.

Courbe tangentielle. — Le point où la tangente à une cubique plane en un point donné la rencontre à nouveau est déterminé par l'intersection de la tangente avec la droite

$$xH_1 + yH_2 + zH_3 = 0,$$

H_1, H_2, H_3 désignant les dérivées premières du hessien par rapport aux coordonnées du point donné.

Le nouveau point ainsi obtenu est appelé le tangentiel du point considéré.

La courbe d'ordre $(n-2)$ qui passe par les $(n-2)$ points où la tangente à une courbe d'ordre n la rencontre à nouveau est dite courbe tangentielle.

Elle est d'ordre $2(n-2)$ par rapport aux coordonnées du point donné (x', y', z') et du 3e ordre par rapport aux coefficients de l'équation originale.

Les tangentielles des courbes du 4e, 5e, 6e ordre sont respectivement

$$\Delta^2 H - 3\Delta^2 H_1 = 0,$$
$$\Delta^3 H - 4\Delta^3 H_1 + 6\Delta^3 H_2 = 0.$$
$$\Delta^4 H - 5\Delta^4 H_1 + 10\Delta^4 H_2 = 0.$$

Salmon d'abord, et après lui, Cayley, ont été conduits par induction à l'équation de la tangentielle d'une courbe du n^e degré, qui est

$$\Delta^{n-2} H - \binom{n-1}{1}\Delta^{n-2} H_1 + \binom{n-1}{2}\Delta^{n-2} H_2 - \binom{n-1}{3}\Delta^{n-2} H_3 + \dots = 0,$$

où $\Delta^{n-2} H$ est la $(n-2)^e$ polaire de (x', y', z') par rapport à H, et $\Delta^{n-2} H_2$ se déduit de $\Delta^{n-2} H$ en remplaçant n par $n-2$.

La notation $\binom{n-1}{x}$ désigne les coefficients du binome de Newton.

Voir G. Salmon. Courbes planes pp. 489-496.

Courbe transcendante. — Toute courbe

non algébrique est une courbe transcendan[te].

Les courbes transcendantes se divisent en trois catégories : Courbes continues, courbes non continues, courbes discontinues (Voir ces mots).

Le degré n'existe pas pour les fonctions transcendantes, ni pour les courbes qu'elles représentent. On ne peut donc établir pour ces courbes les caractéristiques habituelles des courbes algébriques.

Une courbe transcendante peut être unicursale. Il suffit pour cela que ses coordonnées soient fonctions d'un paramètre, comme cela se présente pour la cycloïde, la chaînette, etc. toutefois, la notion de genre ne saurait exister pour ces courbes.

La géométrie des courbes transcendantes est loin d'être aussi avancée que pour les courbes algébriques. On ne peut en déterminer les asymptotes par des règles fixes ; ni évaluer d'avance le nombre de leurs singularités (points multiples, tangentes, inflexions, rebroussements, etc).

Cependant il existe des relations particulières entre les courbes transcendantes et les courbes algébriques. Ainsi, par exemple, les points où la tangente passe par un point donné ou est parallèle à une direction donnée, appartiennent fréquemment à une courbe algébrique. De même, les tangentes aux points d'intersection avec une droite donnée enveloppent une courbe algébrique. Ces propriétés se présentent pour les courbes transcendantes

$y = lx$, $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{tang} x$, $y = \operatorname{arc\,tg}$.

(voir I. M. 1896. p. 7. P.-H. Schoute, et p. 141. G. Fouret).

Appliquées aux épicycloïdes transcendantes et aux spirales de diverses formes, ces remarques conduisent à des résultats intéressants.

Pour nous limiter à des exemples très simple[s] nous supposerons les tangentes parallèles à l'axe des y.

Epicycloïde couvrant la couronne circulaire de rayons a et $a + 2b$:

$$x = (a+b)\cos u + b\cos\frac{a+b}{b}u$$

$$y = (a+b)\sin u - b\sin\frac{a+b}{b}u$$

La courbe cherchée est alors une ellipse concentrique et doublement tangente aux deux cercles de la couronne :

$$\frac{x^2}{(a+2b)^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Spirales diverses.

Spirale d'Archimède
$r = a\theta$ $\qquad r = a \operatorname{cotg} \theta \qquad$ Cappa

Spirale hyperbolique
$r = \frac{a}{\theta}$ $\qquad r = -a \operatorname{tang} \theta \qquad$ Cappa

Spirale logarithmique
$r = a e^{m\theta}$ $\qquad \theta = \operatorname{arc\,cotg} \frac{1}{m} \qquad$ droite

Spirale polaire
$r^2 = \frac{a^2}{\theta}$ $\qquad r = a\sqrt{2 \operatorname{tang} \theta}$

Cochléoïde
$r = a \frac{\sin \theta}{\theta}$ $\qquad r = a \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta} \qquad$ strophoïde

Spirale parabolique de Fermat
$r^2 = a^2\theta.$ $\qquad r^2 = \frac{a^2}{2} \operatorname{cotg} \theta$

Spirale de Poinsot
$r = \frac{2}{e^{a\theta} + e^{-a\theta}}.$ $\qquad r = \frac{\sqrt{a^2 \operatorname{cotg}^2 \theta - 1}}{a \operatorname{cotg} \theta}.$

Voir M. 1898, quest. 1177 (H. Brocard).

__Courbe unicursale.__ — Courbe algébrique ou transcendante que l'on peut représenter, en fonction d'un paramètre variable t, au moyen de deux équations de la forme

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t),$$

f_1, f_2 étant des fonctions uniformes du paramètre t, c'est-à-dire telles qu'à chaque valeur de t ne corresponde qu'une valeur de f_1 et de f_2.

x', y' désignant les dérivées de x et y par rapport à t, la tangente au point (x, y) a pour équation

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'},$$

et la normale

$$(X-x)x' + (Y-y)y' = 0.$$

Une courbe unicursale est la trajectoire d'un point ; son étude relève de la Cinématique, quand on suppose que le paramètre t représente le temps.

Parmi les courbes transcendantes unicursales, on peut citer la cycloïde et la chaînette. (Voir ces mots).

On étudie plus spécialement les courbes uni-

cursales algébriques en prenant les équations sous la forme

$$x = \frac{f_1(t)}{\varphi(t)}, \quad y = \frac{f_2(t)}{\varphi(t)},$$

f_1, f_2, et φ étant des polynomes algébriques entiers.

Le degré d'une telle courbe est en général le degré le plus élevé des trois polynomes.

L'équation générale de la tangente est alors

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ f_1(t) & f_2(t) & \varphi(t) \\ f'_{1t} & f'_{2t} & \varphi'_t \end{vmatrix} = 0.$$

Il existe des règles simples pour la détermination des asymptotes et des points multiples.

On a remarqué que les courbes unicursales sont fréquemment du genre zéro; mais il n'est pas exact d'en conclure que toute courbe unicursale est du genre zéro; par exemple, la courbe

$$y = \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

essentiellement unicursale puisqu'elle résulte de

$$x = t, \quad y = \frac{f(t)}{\varphi(t)},$$

n'a aucun point double, car à toute valeur de x correspond une valeur de y et une seule; elle est donc du genre maximum et non du genre zéro.

On peut démontrer que toute courbe du genre zéro est susceptible d'être représentée par deux équations de forme unicursale; mais la réciproque n'est pas vraie.

En géométrie de l'espace, on appelle courbe unicursale toute courbe représentée, en fonction du paramètre t, par trois équations uniformes

$$x = F_1(t), \quad y = F_2(t), \quad z = F_3(t).$$

La tangente au point $(x.y.z)$ a pour équations

$$\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'} = \frac{Z - z}{z'}.$$

L'équation du plan normal, en coordonnées rectangulaires, est

$$(X - x)x' + (Y - y)y' + (Z - z)z' = 0$$

et l'équation du plan osculateur au même point est

$$\sum (y'z'' - z'y'')(X - x) = 0.$$

On en déduit les équations de la normale principale, de la binormale, les éléments de courbure, etc.

Voir les Traités de Géométrie analytique et de Calcul Différentiel.

Courbe unipartite. — Courbe dont tous les points se succèdent les uns aux autres dans un ordre déterminé et forment une suite unique. Exemples : l'ellipse, les paraboles, les cubiques sans ovale.

Une courbe est bipartite lorsqu'elle est composée de deux séries continues de points bien distinctes. Exemples : les cubiques à ovale.

On distingue, de même, des courbes tripartites, quadripartites, etc. Ainsi, une même famille de quartiques peut comprendre des courbes unipartites, bipartites, tripartites et quadripartites.

Voir G. Salmon, Courbes planes, pp. 240, 248, 311, etc.

Cette classification de courbes d'après leur tracé paraît n'avoir qu'un intérêt de curiosité, mais elle a une certaine portée pratique, car on a observé qu'en général le nombre maximum de parties d'une courbe est supérieur d'une unité au genre de la courbe.

Courbe usuelle. — La dénomination de courbes usuelles qui, dans plusieurs ouvrages, sert à désigner les coniques, prête singulièrement à la critique. En quoi l'ellipse, l'hyperbole et la parabole sont-elles usuelles ? La logarithmique, la sinusoïde et diverses courbes trigonométriques ne mériteraient-elles pas mieux ce titre, puisqu'on a pris soin de réduire en tables les valeurs numériques de leurs ordonnées pour des subdivisions aussi petites que possible de leurs abscisses ?

En fait de courbe usuelle, le cercle seul mériterait ce nom, car aucune ligne n'a de tracé plus simple.

Il est à désirer que ce nom de courbe usuelle, qui est antiscientifique et impossible à justifier, disparaisse de l'enseignement de la Géométrie.

Couronne. — Courbe plane formée de deux cercles concentriques.

C'est la surface comprise entre ces deux cercles qui porte plus particulièrement le nom de couronne, mais il n'y a aucun inconvénient à cette identité de noms pour désigner une courbe et la surface qu'elle renferme. C'est ainsi qu'il en est déjà pour le mot cercle.

R et r désignant les rayons des deux cercles concentriques, la surface de la couronne est

$$S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2).$$

On a donc ce théorème : Les cercles ayant pour rayons les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle sont les surfaces des couronnes formées avec les cercles dont les rayons sont l'hypoténuse et chacun des côtés de l'angle droit.

L'intersection d'un tore par un plan perpendiculaire à l'axe est une couronne.

Certaines courbes planes, telles que les rosaces et leurs variétés, les épicycloïdes, etc. sont limitées à des couronnes circulaires qui renferment leurs sommets ou leurs points de rebroussement, etc.

Voir Epicycloïde.

Note. On donne en Physique le nom de couronnes à des auréoles circulaires qui entourent souvent la Lune, et même, en cas de brouillard, toutes les lumières un peu vives, comme par exemple les bec de gaz d'une ville.

Les couronnes sont toujours produites par diffraction et jamais par dispersion.

Le cercle d'Ulloa est un cas particulier d'une couronne.

La diffraction qui donne naissance au phénomène de la Couronne est produite par des gouttelettes d'eau, très fines, en suspension dans l'atmosphère. Elles jouent le rôle de corps opaques excessivement petits et elles diffractent la lumière à la façon d'une infinité de petites stries opaques tracées sur un corps transparent.

Les couronnes sont en réalité des bandes d'interférence ; le violet est la couleur la plus rapprochée du centre. C'est le contraire pour les halos, où le rouge est à l'intérieur.

L'ordre des couleurs varie dans le phénomène de l'arc-en-ciel, suivant la situation de l'arc; mais le rayon des arcs composant ce météore est invariable, tandis que celui des couronnes varie entre des limites étendues.

La théorie rationnelle des couronnes a été faite par Babinet.

<u>Cubique</u>. — Sous le nom de cubiques, on désigne toutes les courbes du 3e ordre ou du 3e degré.

La bibliographie des cubiques est aujourd'hui très développée. On en trouvera un exposé détaillé dans l'ouvrage de Gino Loria : Teorie geometriche, 1896, pp. 37 et suivantes, et par-

ticulièrement pp. 62-69.

Les premières recherches à ce sujet remontent à 1701, date de l'ouvrage intitulé :

Enumeratio linearum tertii ordinis, publié par Newton, mais qui paraît avoir été écrit en 1678; puis il faut mentionner :

Stirling : Lineæ tertii ordinis Newtonianæ sive Illustratio tractatus Newtoni de enumeratione linearum tertii ordinis (1717).

Nicole : Traité des lignes du troisième ordre (1733).

Cotes : Harmonia mensurarum (1722).

Mac-Laurin : De linearum geometricarum proprietatibus generalibus Tractatus (1720).

Nous arrivons au XIXe siècle, où, dès les premières années, nous rencontrons les recherches et les travaux de Steiner, Plücker, Hesse, Cayley, Grassmann, G. Salmon, puis, durant la seconde moitié du siècle, une activité extraordinaire et qui ne s'est point ralentie dans l'étude des cubiques.

Le détail des travaux publiés nous entraînerait au-delà des limites d'un Recueil destiné surtout à donner les indications les plus essentielles. Il nous suffira sans doute de rappeler ici les noms des plus actifs collaborateurs à la Géométrie des cubiques : Chasles, Cremona, E. de Jonquières, Schröter, Durège, Sylvester, Hart, Clebsch, Gordan, Aronhold, Hurwitz, Bobek, E. Laguerre, K. Kupper, S. Kantor, Brill, Nöther, G. Halphen, H. Picquet, Em. Weyr, Russell, Gundelfinger, Clifford, Le Paige, Folie, Schlesinger, de Vriës, P.H. Schoute, Kapteyn, Cardinaal, P. Serret, etc.

En présence de l'évidente impossibilité de donner ici l'indication des importants résultats obtenus dans la théorie des cubiques, nous croyons devoir signaler au lecteur l'ouvrage de G. Salmon, Courbes planes, où la Géométrie des cubiques est présentée avec tout le développement désirable (Ch. V, pp. 186-301; 1884).

<u>Cubique</u> <u>acnodale</u>. — Voir Cubique nodale.

<u>Cubique</u> <u>anallagmatique</u>. — Cubique circonscrite à un triangle de référence ABC, représentée, en coordonnées trilatères, par une équation

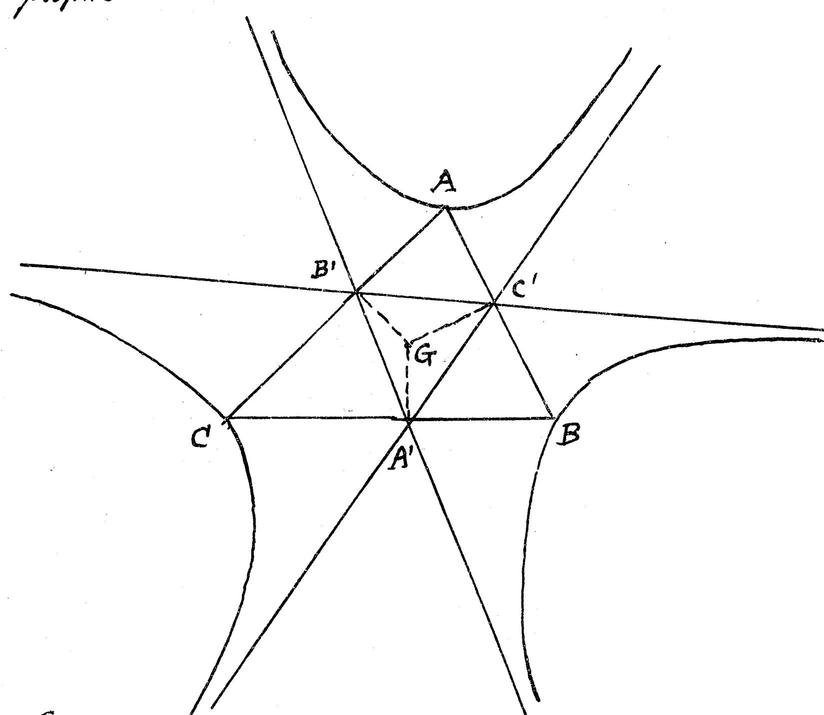
de la forme

$$\lambda\alpha(\beta^2+\gamma^2)+\mu\beta(\gamma^2+\alpha^2)+\nu\gamma(\alpha^2+\beta^2)+\xi\alpha\beta\gamma=0$$

et se reproduisant elle-même, quand on remplace dans l'équation α, β, γ par $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ (Voir Anallagmatique)

Une cubique anallagmatique est donc, en coordonnées normales, le lieu de ses points inverses (Voir Arguésienne), et en coordonnées barycentriques, le lieu de ses points réciproques (Voir Courbe réciproque).

Les courbes du 3e degré sont les seules qui, par rapport à un triangle, jouissent de cette propriété.



En coordonnées barycentriques, la courbe anallagmatique

$$\alpha(\beta^2+\gamma^2)+\beta(\gamma^2+\alpha^2)+\gamma(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\beta\gamma=0 \qquad (C)$$

admet pour asymptotes d'inflexion les trois droites (pédales du barycentre, ou côtés du triangle pédal du barycentre) B'C', A'C', A'B':

$$\alpha-\beta-\gamma=0, \quad \beta-\alpha-\gamma=0, \quad \gamma-\alpha-\beta=0.$$

Elle passe d'ailleurs par les trois sommets A, B, C. Elle a donc la forme indiquée ci-dessus.

On peut également considérer, en supprimant le

dernier terme de l'équation (C), la cubique

$$\alpha(\beta^2+\gamma^2)+\beta(\gamma^2+\alpha^2)+\gamma(\alpha^2+\beta^2)=0. \qquad (\Gamma).$$

Elle a la même forme générale que la précédente; seulement, ses asymptotes sont les droites

$$2\alpha-\beta-\gamma=0,\quad 2\beta-\alpha-\gamma=0,\quad 2\gamma-\alpha-\beta=0,$$

c'est-à-dire les parallèles aux côtés, menées par le barycentre G.

Il est facile de voir que si les équations (C) et (Γ) étaient en coordonnées normales, les courbes conserveraient la même forme générale, le barycentre G et son triangle pédal étant remplacés par le centre I du cercle inscrit et son triangle pédal.

Il existe une autre famille de cubiques anallagmatiques, c'est celle dont l'équation générale est

$$\lambda\alpha(\beta^2-\gamma^2)+\mu\beta(\gamma^2-\alpha^2)+\nu\gamma(\alpha^2-\beta^2)=0.$$

En particulier, pour $\lambda=\mu=\nu=1$, l'équation

$$\alpha(\beta^2-\gamma^2)+\beta(\gamma^2-\alpha^2)+\gamma(\alpha^2-\beta^2)=0$$

représente, en coordonnées barycentriques, les trois médianes, et en coordonnées normales, les trois bissectrices. — Dans un système de coordonnées que l'on définirait par les distances d'un point aux trois côtés multipliées par les carrés de ces côtés, elle représenterait les trois symédianes (Voir les études relatives au Cercle de Lemoine). Dans un tel système, les courbes (C) et (Γ) conserveraient la même forme générale, le point de Lemoine et son triangle pédal se substituant à G et à son triangle pédal.

Corrélativement, on peut appeler cubiques anallagmatiques tangentielles celles qui sont représentées, en coordonnées tangentielles, par l'équation générale

$$\lambda U(V^2+W^2)+\mu V(W^2+U^2)+\nu W(U^2+V^2)+\xi UVW=0,$$

qui se reproduisent elles-mêmes, quand on remplace, dans l'équation, U, V, W par $\frac{1}{U}, \frac{1}{V}, \frac{1}{W}$.

Une cubique anallagmatique tangentielle est donc, en coordonnées normales, l'enveloppe des droites inverses de ses tangentes (Voir Arguésienne), et en coordonnées barycentriques, l'enveloppe des droites réciproques de ses tangentes (Voir Courbe réciproque).

Toutes ces courbes sont de 3e classe (et par conséquent, du 6e ordre); les courbes de 3e classe sont les seules qui, par rapport à un triangle, puissent être anallagmatiques tangentielles.

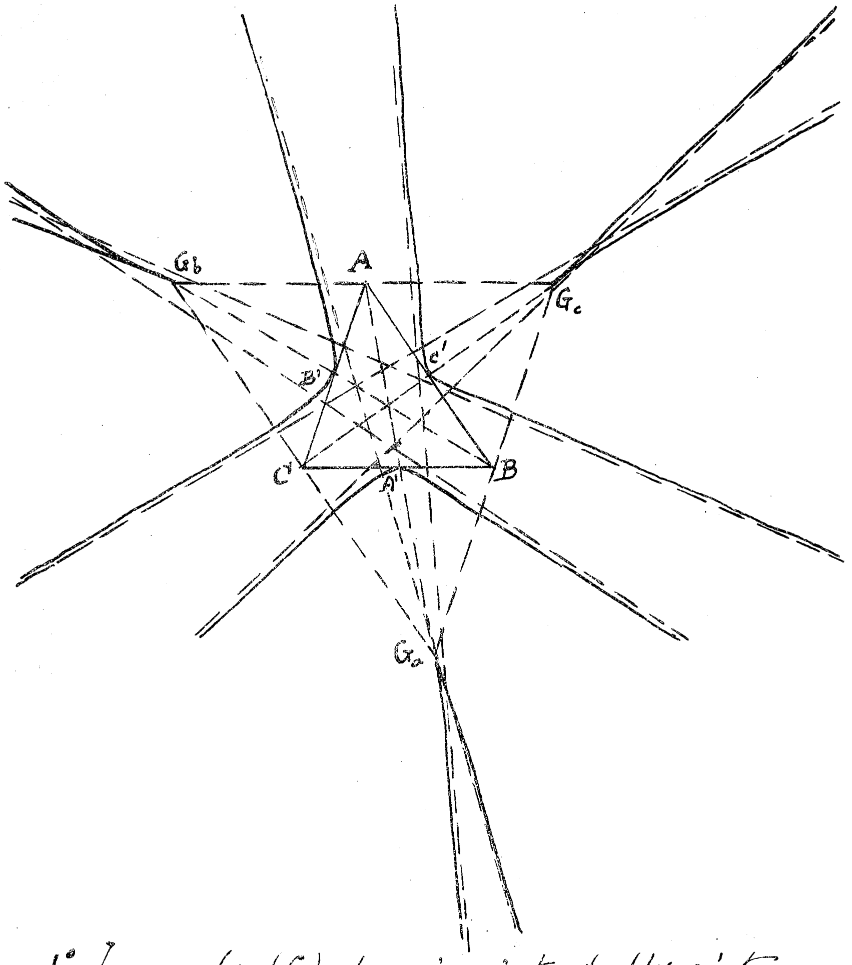
Lorsque l'on a construit une courbe ponctuelle telle que la courbe (C), il est très facile d'en déduire sa corrélative tangentielle. Soit la courbe

$$U(V^2+W^2)+V(W^2+U^2)+W(U^2+V^2)+UVW=0 \qquad (C')$$

La courbe (C) passe par les sommets A, B, C et y est

tangente aux parallèles aux côtés ($\beta+\gamma=0$, etc.); elle admet les trois asymptotes d'inflexion ($\alpha-\beta-\gamma=0$, etc) avec points de contact ($V-W=0$, etc). Donc la courbe (C') est tangente aux trois côtés a, b, c, avec points de contact en leurs milieux ($V+W=0$, etc). Elle admet trois points de rebroussement de 1re espèce G_a ($U-V-W=0$) G_b, G_c, avec tangentes ($\beta-\gamma=0$, etc.) qui ne sont autres que les médianes.

Pour achever la construction, il faut remarquer que



1° La courbe (C) n'a ni points doubles ni tangentes doubles; donc la courbe (C') ne peut avoir d'autres points doubles que les trois points de rebroussement correspondant aux asymptotes d'inflexion, ni d'autres tangentes doubles que les tangentes en ces points;

2° De chacun des points A', B', C' on peut mener deux tangentes réelles à la courbe (C); donc la courbe (C') coupera en deux points réels chaque côté du triangle $G_a G_b G_c$.

3° Du barycentre G (corrélatif de la droite de l'infini) on peut mener six tangentes à la courbe (C); donc la courbe (C') a six asymptotes, corrélatives des points de contact de ces tangentes.

Il est possible de déterminer avec précision ces divers éléments du tracé; mais, sans avoir à faire ces calculs très laborieux, on se rend compte aisément, par les considérations qui précèdent, que la courbe (C') a la forme représentée sur la figure ci-contre.

Note. — Pour l'étude des cubiques anallagmatiques ayant en coordonnées normales pour équations

$$A\alpha(\beta^2-\gamma^2)+B\beta(\gamma^2-\alpha^2)+C\gamma(\alpha^2-\beta^2)=0$$

et

$$A\alpha(\beta^2+\gamma^2)+B\beta(\gamma^2+\alpha^2)+C\gamma(\alpha^2+\beta^2)+D\alpha\beta\gamma=0,$$

voir Greiner (Archives de Grunert, (2) I, pp. 130-147). (I. M. 1894, p. 256).

Remarque. — L'équation

$$\alpha(\beta^2+\gamma^2)+\beta(\gamma^2+\alpha^2)+\gamma(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\beta\gamma=0, \qquad (1)$$

qui peut s'écrire aussi

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-2=0,$$

représente une cubique anallagmatique ponctuelle, qui est la jacobienne de trois ellipses ayant les sommets A, B, C du triangle pour centres et les deux côtés aboutissants pour demi-diamètres conjugués (ou en d'autres termes, les deux autres sommets pour points conjugués, ce qui montre la corrélation des définitions ponctuelle et tangentielle).

Ces trois ellipses ont pour équations

$$\alpha^2+2\beta\gamma+2\gamma\alpha+2\alpha\beta=0,$$
$$\beta^2+2\beta\gamma+2\gamma\alpha+2\alpha\beta=0,$$
$$\gamma^2+2\beta\gamma+2\gamma\alpha+2\alpha\beta=0,$$

et en formant la jacobienne, on trouve l'équation (1).

Corrélativement, l'équation

$$U(V^2+W^2)+V(W^2+U^2)+W(U^2+V^2)+UVW=0 \qquad (2)$$

qui peut s'écrire aussi

$$(U+V+W)\left(\frac{1}{U}+\frac{1}{V}+\frac{1}{W}\right)-2=0,$$

représente une cubique anallagmatique tangentielle qui est la cayleyenne de trois ellipses ayant pour polaires respectives du barycentre les côtés BC, CA, AB du triangle et les deux autres côtés pour tangentes conjuguées.

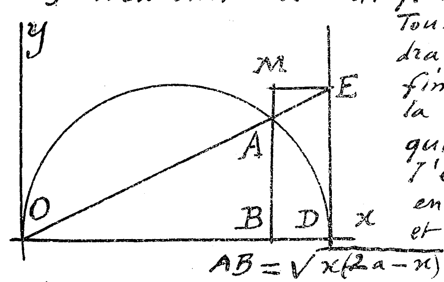
Ces trois ellipses ont pour équations

$$U^2+2VW+2WU+2UV=0,$$
$$V^2+2VW+2WU+2UV=0,$$
$$W^2+2VW+2WU+2UV=0;$$

et en formant la cayleyenne, on trouve l'équation (2).

Cubique d'Agnesi, ou Courbe d'Agnesi. — Marie Agnesi a mentionné sa courbe comme connue. Effectivement, Fermat en avait donné la quadrature 90 ans auparavant (Voir Robervallienne).

Cette courbe se trouve aussi étudiée dans
1° Gregorii Geom. pars universalis. Padoue. 1667. et Exercitationes geometricæ. Londres. 1668
2° Barrovii Lectiones geometricæ. Londres 1672.
3° Newtonii Method. flux.



Tous trois en donnent la quadrature géométrique et la définissent, comme Agnesi, par la construction OABDEM, qui donne immédiatement l'équation de la courbe, car en désignant OB, BM = DE, et OD par x, y, $2a$, on a

$$AB=\sqrt{x(2a-x)}$$

et

$$\frac{AB}{DE}=\frac{OB}{OD}$$

ou

$$y=2a\sqrt{\frac{2a-x}{x}}.$$

(A. Aubry). — Voir aussi Gino Loria : Versiera, Visiera e pseudo-versiera (Bibliotheca mathematica 1897, pp. 7-12).

Marie Gaetana Agnesi a désigné cette courbe sous le nom de versiera (Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana. Milano. 1748).

Voir encore I. M. 1894, p. 153; 1895, p. 83.

Cubique de Chasles. — Voir une note : Sur un réseau conjugué particulier de certaines surfaces dérivées des surfaces de second ordre (C. R. t. CXXV. 1897, pp. 1083-1086) S. Mangeot.

Cubique de direction. — Voir Journal de Liouville. 1887. G. Humbert.

Cubique de n points. — Dans le Volume du 6° Congrès (1897) de Physique tenu à Delft J. Cardinaal a publié (pp. 218-220) une note : Sur une cubique plane particulière. Cette cubique est le lieu des foyers des coniques inscrites au quadrilatère. Elle a fait le sujet de nombreuses études

géométriques (Quetelet, Steiner, Schröter, Küpper, Hermès, Schoute) et cinématiques (Burmester, Schönflies). Ici elle est considérée comme courbe focale, puis comme lieu des couples de points qui peuvent former les six points doubles de quatre positions d'un système plan mobile, avec quatre points fixes donnés, etc. Enfin, on étudie sa relation avec la courbe à longue inflexion de Watt.

Cubique équianharmonique. — Le rapport anharmonique du faisceau formé par les quatre tangentes, que l'on peut mener à une cubique non singulière, par un point arbitraire de la courbe, est constant (théorème de Salmon): si ce rapport est égal à −1, la cubique est dite harmonique.

Si le rapport anharmonique du faisceau précité est une racine cubique imaginaire de −1, c'est-à-dire si les quatre tangentes menées à la courbe par l'un de ses points ont les trois rapports anharmoniques fondamentaux égaux, la cubique est dite équianharmonique.

Voir Curve piane. p. 411, Cremona; Journal de Liouville, 1887, G. Humbert.

Voir aussi Cubique sizygétique.

Cubique gauche. — Courbe du 3e ordre, rencontrée par un plan quelconque en trois points (réels ou imaginaires).

La plus simple est l'intersection de deux cônes du second degré, ayant une génératrice commune.

Comme définition générale, on peut dire que c'est la courbe d'intersection de deux quadriques réglées, lorsque cette intersection, en principe du 4e ordre, se décompose en une droite et en une courbe du 3e ordre.

Pour la bibliographie des cubiques gauches, voir : G. Kœnigs : Sur les cub. g. pass. par 5 points (N. A. 1883, 301-306).

Cremona. — Mémoires sur les cubiques gauches (Annali di Mat. 1859 et 1860 ; Journal de Crelle, t. LVIII ; N. A. 1862).

Schröter : — Math. Annalen, t. XXV : Metrische Eigenschaften der cubischen Parabel.

Gino-Loria : — Su alcune proprietà metriche della cubica gobba osculatrice al piano all'infinito (Rendic. della R. Acc. delle Sc. Fis. e Mat. di Napoli. 1885).

Cubique harmonique. — Voir Cubique

équianharmonique.

Cubique imaginaire. — Lorsque les coefficients de l'équation d'une courbe sont complexes (c'est-à-dire de la forme $a+b\sqrt{-1}$) la courbe est imaginaire, même si son degré est impair.

Une cubique entièrement imaginaire ne peut posséder au plus que 9 points réels.

Note bibliographique. — Il est question des cubiques imaginaires dans le Mémoire de Smith Sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques (couronné du prix Steiner de l'Académie de Berlin en 1868) (Annali di Matematica (2) t III).

Elles sont aussi nommées dans les Leçons de Géométrie de Clebsch Lindemann, t. II. p. 221 de la traduction française.

Cubique mixte. — Pour la bibliographie antérieure à 1886, on peut citer une étude de la cubique mixte, ainsi que d'autres courbes, par Henkel en 1882 (Dissert. Marburg). V. Retali a généralisé les recherches de Henkel et a observé que la courbe di Agnesi, la strophoïde et d'autres cubiques admettent le même mode de génération. Il a obtenu plusieurs résultats nouveaux sur ces diverses courbes.

Cubique nodale. — Cubique ayant un point double avec deux tangentes distinctes. On l'appelle aussi cubique à point double ou cubique à nœud.

La cubique est dite crunodale ou acnodale, selon que les tangentes au point double sont réelles ou imaginaires.

Voir cubique crunodale.

Ces dénominations peuvent tout aussi bien s'appliquer à d'autres courbes ; il n'y a rien qui les attribue d'une manière spéciale aux cubique. Pour cubique bipartite, cubique unipartite, voir Courbe unipartite.

Voir aussi G. Salmon, Courbes planes, p. 235 (cubique à centre); pp. 182, 203, 350 (Cubique circulaire); p. 257 (cubique cuspidale), etc; etc.

Cubique simple. — Dans l'ordre d'idées du premier article consacré aux Cubiques simples, d'après G. de Longchamps, il y aurait en réalité à compter cinq cubiques simples, qu'il

paraît naturel de classer de la manière suivante :

1°. $x^3 - hy^2 = 0$. cubique simple parabolique à point de rebroussement.
2°. $x^3 - h^2y = 0$. cubique simple parabolique à centre, ou cubique simple à inflexion.
3°. $xy^2 - h^3 = 0$. cubique simple hyperbolique, à point double de rebroussement à l'infini.
4°. $x^3 - h(x^2 - y^2) = 0$. cubique simple parabolique à point nodal.
5°. $x^3 - h(x^2 + y^2) = 0$. cubique simple parabolique à point isolé.

La première de ces cubiques, une des plus intéressantes, est plus fréquemment appelée parabole semi-cubique ou parabole de Neil. C'est la développée de la parabole ordinaire.

Pour la construire par points, prenons un angle droit xOy, une droite $AC\Delta$ parallèle à Oy à une distance $OC = h$, puis effectuons le tracé (1.2.3.4) (OB perpendiculaire à OA). Le lieu du point I a pour équation

$$x^3 - hy^2 = 0.$$

La tangente DI au point I rencontre Oy à une distance OD qui est le quart de l'ordonnée OE du point I.

Note. – Pour les autres courbes, voir J.S. 1886, pp. 228-231, ou Géométrie de la règle, 1890, pp. 112-116. G. de Longchamps.

Cubique sizygétique. – Les cubiques menées par les neuf points d'inflexion d'une cubique donnée ont leurs points d'inflexion en ces mêmes points (théorème de Hesse); les cubiques qui ont en commun les neuf points d'inflexion sont dites sizygétiques.

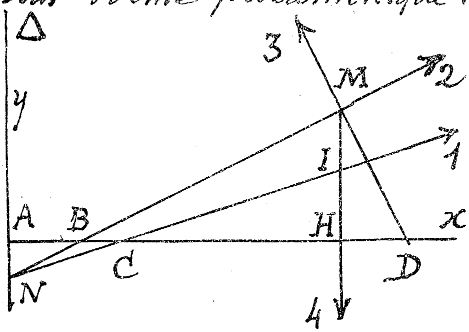
Dans un faisceau sizygétique, il y a quatre cubiques qui se décomposent chacune en trois droites; ces cubiques dégénérées sont dites trilatères.

Chaque sommet d'un trilatère sizygétique est le pôle du côté opposé par rapport à toutes les cubiques du faisceau.

Un faisceau sizygétique contient quatre courbes dont les hessiennes sont les quatre cubiques trilatères du faisceau ; ces quatre cubiques sont équianharmoniques ; il contient aussi six cubiques dont chacune est hessienne de sa propre hessienne : ces six cubiques sont harmoniques.

Voir : Cremona. Curve piane. pp. 417-426.

<u>Cubique unicursale</u>. — Les équations des cubiques unicursales peuvent être mises sous forme paramétrique. (Voir courbe unicursale).



La construction des cubiques unicursales droites peut se ramener au tracé suivant. Prenons quatre points en ligne droite, A, B, C, D, aux distances AB = a, AC = b, BD = c.

Soit NΔ une droite fixe, perpendiculaire à ADx au point A, et prise pour axe des y.

On joint un point N de Oy aux points B, C et l'on mène DM perpendiculaire à NB, puis MH perpendiculaire à Ax, qui rencontre BN au point I [Construction (1.2.3.4)]. Le lieu des points I a pour équation cartésienne

$$x(a^2x^2+b^2y^2)=(a+c-b)a^2x^2+(a-b)b^2y^2.$$

Pour diverses propriétés des cubiques unicursales, voir G. Salmon, Courbes planes, pp. 257-269.

<u>Cubo-cycloïde</u>. — Le nom de cubo-cycloïde a été proposé par Montucci pour la courbe qui déjà de son temps s'appelait hypocycloïde à quatre rebroussements ; mais cette dénomination, déjà inutile par suite de l'existence d'un nom assez fréquemment employé, avait en outre le grave défaut de prêter aux critiques suivantes :

1° la courbe en question est du 6ᵉ degré, et non du 3ᵉ, que semblerait indiquer le préfixe.

2° la courbe est une épicycloïde, ce que veut rappeler le mot cycloïde, malheureusement emprunté à une courbe spéciale, toute différente, et transcendante.

D'ailleurs, le nom primitif d'hypocycloïde à

quatre rebroussements est tout à fait erroné et injustifié. Il laisse à entendre que la courbe n'a que ses quatre points réels de rebroussement, tandis que le nombre de ses rebroussements est de six.

Le nom de tétracuspide, qui paraîtrait mieux lui convenir, donnerait lieu encore aux mêmes objections que celui d'hypocycloïde à quatre rebroussements. Il serait bon cependant de le conserver pour la courbe enveloppe d'un segment de droite appuyé aux deux côtés d'un angle quelconque. Lorsque cet angle est droit, la tétracuspide devient l'hypocycloïde dite à quatre rebroussements, mais pour ne pas lui donner cette appellation défectueuse, on la désignera sous le nom d'astroïde.

Voir Astroïde.

Note. — L'astroïde a pour équation cartésienne

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

L'analogie de cette équation avec celle de la développée de l'ellipse a fait quelquefois confondre l'astroïde avec une développée d'ellipse. En réalité l'astroïde est une hypocycloïde; ses développantes sont donc les courbes parallèles à une certaine hypocycloïde.

Si A et B désignent les extrémités du segment AB de longueur a, appuyées à deux axes rectangulaires OAx, OBy, on a

$$OA^2 + OB^2 = a^2.$$

L'enveloppe du segment AB est l'astroïde.

D'une manière toute semblable, si l'on a

$$OA^2 - OB^2 = l^2,$$

l'enveloppe de AB a pour équation

$$x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$$

Cette courbe admet une autre définition géométrique. Elle est l'enveloppe d'hyperboles équilatères concentriques rencontrant à angle droit une droite fixe.

Voir pour une étude de cette dernière courbe, N. A., 1849, p. 376, 1851, p. 314 et El Progreso matematico, 1893, pp. 212-218 (H. Brocard) et pp. 288-289 (E. Lemoine).

<u>Curva Schootenii</u>. — La courbe ainsi nommée a été considérée par Schooten dans l'ouvrage intitulé: Francisci a Schooten Exercitationum Mathematicarum libri quinque (Leyde,

Jean Elzevir, 1657). Dans le t. I des Œuvres de Fermat, où elle est citée (p. 276), la courbe est reproduite d'après Schooten, qui lui a attribué la forme d'une boucle, dont il a donné, d'après J. Hudde, une construction de la plus grande largeur.

Il est singulier que ni Schooten ni Fermat n'aient fait mention de Descartes comme ayant proposé le premier cette courbe, à laquelle Roberval donne le nom de galand (nœud de ruban) et qui est ordinairement désignée maintenant sous celui de folium de Descartes.

Schooten a pensé que la courbe se réduisait à la seule boucle ; Roberval croyait qu'elle se composait de quatre boucles égales, situées dans les quatre angles droits.

Voir I. M. 1897, pp. 19-20 et 125-126 (P. Tannery).

Cycle. — Pour l'emploi du cycle imaginé par G. Halphen dans l'étude des points singuliers des courbes algébriques planes, voir le Mémoire de G. Halphen ajouté à l'ouvrage de G. Salmon, Courbes planes, pp. 537-648, où sont définis l'origine, l'ordre, la tangente, la classe d'un cycle, la correspondance de deux cycles sur des courbes corrélatives, les cycles qui correspondent à des directions isotropes, l'ordre d'une fonction relativement à un cycle, etc.

Cycloïdale. — Le nom de cycloïdale, équivalent à celui de roulette, désigne la courbe engendrée par un point invariablement lié à une courbe qui roule sans glisser sur une droite fixe.

Cycloïde. — Le nom de l'auteur de l'écrit Historia Cycloidis (Hamburg, 1701) est Johannes Groeningius, inexactement appelé Jean de Groningue.

Les premières indications sur la cycloïde semblent devoir être attribuées à Galilée et au Cardinal de Cusa, qui lui assignèrent la forme d'un arc de cercle, sans arriver à la préciser davantage.

L'histoire développée de ses origines a fait le sujet d'une étude particulière de S. Günther, intitulée : War die Zykloide bereits im XVI Jahrhundert bekannt ? (La cycloïde était-elle déjà connue au XVIe siècle ?) (Bibliotheca mathematica, pp. 8-14, 3 fig. 1887).

Voir aussi la Correspondance de Descartes.
Pour la question de la part de Roberval et de Pascal dans la découverte de diverses propriétés de la cycloïde, voir : Eloge de Pascal, par l'abbé Bossut.
Une étude intitulée : Théorie géométrique de la Cycloïde, par Du Bourguet, a été publiée dans le t. VI des Annales de Gergonne, pp. 29-45.
Cycloïdes diverses. — Les cycloïdes allongées ou accourcies définies dans ce Recueil, se rapportent à des points extérieurs ou intérieurs à la circonférence génératrice de la cycloïde ordinaire. Ce sont les courbes allongées et accourcies (ou raccourcies) de Pascal. Mais il en a été imaginées d'autres par Fermat. Les cycloïdes allongées ou raccourcies de Fermat sont les courbes représentées par les équations

$$x = a(u - \sin u),$$
$$y = b(1 - \cos u)$$

analogues aux équations paramétriques de la cycloïde ordinaire, et qui coïncident avec celles de cette courbe lorsqu'on suppose $b = a$.
Fermat les a définies dans un passage d'une lettre à P. de Carcavy : « On peut considérer les roulettes allongées ou raccourcies d'une autre manière que n'a fait Monsieur Dettonville (*). Supposez qu'en la roulette ordinaire les seules appliquées (**) soient allongées ou raccourcies proportionnellement ... Je dis que toutes les roulettes allongées en ce sens sont esgalles à la somme d'une ligne droite et d'une circulaire, et que toutes les roulettes accourcies au même sens sont esgalles à des courbes paraboliques. ... p.e. soit une roulette allongée dont les appliquées soient aux appliquées de la roulette naturelle comme le diamètre d'un quarré à son costé, je dis que cette roulette allongée prise toute entière ... est égale à la circonférence du cercle générateur de la roulette ordinaire et au double de son diamètre, etc. »
On voit que les roulettes ainsi définies représentent, avec la cycloïde ordinaire, un système de courbes affines.
A l'occasion d'un désaccord survenu entre

(*) Blaise Pascal. (**) Ou Ordonnées.

Fontaine et Clairaut sur la véritable nature d'une courbe que Fontaine prenait pour la tractrice et que Clairaut reconnut identique à la cycloïde, ce dernier, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences pour 1736, publia une étude intitulée : Solution de quelques problèmes de Dynamique, où il suppose que le point P d'une tige PM se meut uniformément sur une droite PE, pendant que la tige PM tourne d'un mouvement uniforme. Le lieu des points M est alors évidemment une cycloïde allongée ou accourcie. (Mém. p. 1736, pp. 1-22).

Voir J.-F. Français : Problème de la tractoire (Annales de Gergonne. t. IV. pp. 305-310).

Voir aussi l'article : Tractrice.

<u>Cycloïde géométrique</u>. — Ce nom a été donné par Ozanam (Dictionnaire mathématique ou idée générale des Mathématiques, Amsterdam. 1691. p. 102) à la courbe dont l'équation est

$$x^4+2x^2y^2+y^4+2ax^2y+ay^3-a^2x^2=0.$$

On voit de suite que la cycloïde géométrique est identique à la cardioïde. (Voir ce mot).

<u>Développée</u>. — Pour les propriétés générales des développées, voir G. Salmon, Courbes planes, pp. 118-141.

Le degré et la classe de la développée d'une courbe sont les mêmes que ceux de sa réciproque.

Le genre de la développée est le même que celui de la courbe primitive.

Une courbe et sa développée ont les mêmes foyers.

Voir aussi : Minilowski : Détermination de l'ordre et de la classe de la développée d'une courbe de n^e ordre (Z. S. t. XIX. 1874)

A la bibliographie du sujet on peut ajouter les notes suivantes :

Apollonius a remarqué que le plan d'une conique est séparé en deux régions, celle d'où on peut mener trois droites minima (normales) et celle d'où on ne peut en mener qu'une. Cette remarque est demeurée stérile jusqu'à ce que Huygens (Horol. oscill. Paris. 1673), voulant utiliser l'isochronisme de la cycloïde à la construction d'un pendule isochrone, eut l'idée d'appuyer la tige flexible du pendule à deux demi-

développées de cycloïde. De là l'idée d'étudier les développées en général. Il appelle evoluta la développée et ex evolutione descripta la développante. Les noms de développée et de développante sont dûs respectivement à Fontenelle et à Diderot.

Ozanam, dans son Dictionnaire mathématique et son Cours de mathématiques, appelle la développée la ligne d'évolution.

Newton (Meth. Flux.) arrive aux mêmes considérations par l'étude de l'intensité de la courbure, qu'il mesure par celle d'un cercle.

Le problème de l'osculation en général a été traité par Leibniz (De generalia linearum; Acta Eruditorum. 1692) et plus rigoureusement par Lagrange (Théorie des fonctions analytiques).

Cramer (Introd. aux courbes algébr. 1750) emploie les traductions d'attouchement et de cercle baisant, auxquelles les mathématiciens ont préféré celles de contact ou osculation et de cercle osculateur. (A. Aubry).

Note. — La cissoïde

$$(2a-x)y^2 = x^3$$

a pour développée

$$4096\, a^3 x + 1152\, a^2 y^2 + 27\, y^4 = 0.$$

La logarithmique

$$y = lx$$

a pour développée

$$y = -\frac{1}{2} + l\,\frac{x+\sqrt{x^2-8}}{4} - \frac{x}{8}\left(x+\sqrt{x^2-8}\right).$$

Droite. — Voici quelques noms à ajouter à la liste des droites qui ont reçu des dénominations particulières:

Diamètre de Newton. Cévienne.

Antiparallèle. Médiane anti-parallèle.

z d'un point (ou cote d'un point, ou distance d'un point au plan horizontal).

Polaire d'un point par rapport à une conique (voir Polaire).

Polaire rectiligne d'un point par rapport à une surface d'ordre m. (Voir Polaires de divers ordres).

Semi-droite.

Droite de Cayley.

Droite de Salmon.

Droite inverse.

Droite réciproque.

Ellipse de Cassini. — Les ellipses de Cassini sont des courbes qui n'ont avec l'ellipse qu'une simple analogie de forme dans un cas tout à fait particulier. Ovale de Cassini est donc une dénomination plus justifiée et l'on peut s'en tenir à ce nom. Cassinienne est quelquefois employé, parce que l'ovale de Cassini est une variété de Cassinienne, de même que l'ovale de Descartes est une variété de Cartésienne (voir ces mots). Mais la dénomination de Cassinoïde est absolument injustifiable et doit être rejetée.

Les ovales de Cassini, rapportées à leurs deux pôles ou foyers F, F', ont une définition géométrique : le produit des deux rayons vecteurs d'un point de ces courbes est constant.

Soient m^2 ce produit et $2c$ la distance FF'. L'origine étant au milieu de FF', pris pour axe des x, l'équation de ces courbes est

$$(x^2+y^2-c^2)^2 - 4c^2x^2 = m^4$$

Le cas de $m=c$ correspond à la lemniscate de Bernoulli.

Si m est $< c$, la courbe se compose de deux ovales conjuguées, intérieurs aux deux boucles de la lemniscate, et entourant les deux foyers.

Si m est $> c$, la courbe est formée d'un seul ovale continu, extérieur à la lemniscate, et ayant l'apparence d'une ellipse.

Ellipse de Fregier. — Voir Conique de Fregier.

Pour diverses propriétés de l'ellipse de Fregier, voir J. Steiner (Crelle, t. XLV, 1852) et V. Retali (Mem. de l'Ac. de Bologne, (4). t. VII, pp. 620-622).

Ellipse de Lemoine. — L'ellipse de Lemoine a pour foyers les points G et K.

On pourra déterminer ses axes $2A_1$ et $2B_1$ par les relations

$$\overline{KG}^2 = A_1^2 - B_1^2 ;$$

$$\frac{4S^2}{3(a^2+b^2+c^2)} = B_1^2 ;$$

avec

$$\overline{KG}^2 = \frac{3\Sigma a^4b^2 - \Sigma a^6 - 15a^2b^2c^2}{9(\Sigma a^2)^2} .$$

Cette dernière formule a été donnée par Poulain (J.E. quest. 348 ; 1893, p. 91).

Ellipse de Mandart. — Cette ellipse touche les trois côtés aux points d'intersection avec les céviennes du point de Nagel.

Ellipse de Steiner. — Il y a deux ellipses de ce nom, ayant pour centre le barycentre G d'un triangle ABC et dont l'une est circonscrite, et l'autre inscrite à ce triangle.

Ellipse circonscrite. — Elle a pour équation barycentrique

$$\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = 0.$$

Ses tangentes aux sommets du triangle sont parallèles aux côtés.

L'ellipse passe par le point de Steiner $\left(\frac{1}{b^2-c^2}, \frac{1}{c^2-a^2}, \frac{1}{a^2-b^2}\right)$ et, plus généralement, quels que soient $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$, par tout point $(\beta^\lambda - \gamma^\lambda, \gamma^\lambda - \alpha^\lambda, \alpha^\lambda - \beta^\lambda)$.

La tangente au point de Steiner a pour équation

$$\Sigma (b^2 - c^2)\alpha = 0.$$

Cette droite remarquable est la réciproque de la droite harmoniquement associée au centre de l'hyperbole de Kiepert.

Un autre point à signaler est le point $\left(\frac{1}{b^2+c^2-2a^2}, \frac{1}{c^2+a^2-2b^2}, \frac{1}{a^2+b^2-2c^2}\right)$, intersection de la première ellipse de Steiner avec l'hyperbole de Kiepert. La tangente en ce point est la droite remarquable

$$\Sigma (b^2 + c^2 - 2a^2)\alpha = 0.$$

Ellipse inscrite. — Elle a pour équation barycentrique

$$\Sigma \alpha^2 - 2\Sigma \beta\gamma = 0.$$

Elle touche les côtés en leurs milieux. Elle passe par le centre de l'hyperbole de Kiepert $[(b^2-c^2)^2, (c^2-a^2)^2, (a^2-b^2)^2]$ et plus généralement par tout point $[(\beta^\lambda - \gamma^\lambda)^2, (\gamma^\lambda - \alpha^\lambda)^2, (\alpha^\lambda - \beta^\lambda)^2]$.

La tangente au centre de l'hyperbole précitée est la droite remarquable

$$\Sigma [a^4 + b^2c^2 - a^2(b^2+c^2)]\alpha = 0.$$

Note. — Pour l'étude de ces deux ellipses, respectivement désignées par $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, voir J. Neuberg et A. Gob : Sur les axes de Steiner et l'hyperbole de Kiepert, — Sur les foyers de Steiner d'un triangle (A. F. Paris. 1889, pp. 166-179 et 179-196.)

Ellipses de divers degrés. — Les ellipses, cercles, hyperboles (ou coniques) de divers degrés, représentent une famille de courbes qui sont identiques aux perles de Pascal ou de Sluze.
Leur équation générale peut s'écrire

$$a^{p+q-r} y^r = x^p (a \pm x)^q.$$

Dans une lettre du 8 janvier 1658, de Sluze en parle en ces termes : « Parabolarum infinitarum exemplo, hyperbolas etiam ac circulos vel ellipses infinitas excogitaveram, » etc.
Voir Œuvres de Chr. Huygens, t. II.

Ellipse géodésique. — Lieu des points d'une surface dont la somme des distances géodésiques à deux points fixes de la surface nommés foyers, est constante.

Les propriétés de l'ellipse géodésique sont tout à fait analogues à celles de l'ellipse ordinaire. Par exemple, si d'un point de la courbe on mène les deux géodésiques passant par les foyers, la géodésique qui est leur bissectrice est tangente (ou normale) à la courbe.

La considération des ellipses géodésiques est surtout de grande importance dans l'étude de l'ellipsoïde. On trouve alors que les lignes de courbure ne sont autre chose que des ellipses géodésiques ayant pour foyers les ombilics de la surface, c'est-à-dire les points de contact des plans tangents parallèles aux sections circulaires.

Ellipse microsphérique. — Dénomination proposée par E. Wasteels (Annuaire sc. du cercle des Normaliens, 1888, p. 92, et M. 1891, pp. 83-84).

L'ellipse microsphérique est la figure inverse d'une ellipse plane par rapport à un point situé sur la perpendiculaire élevée par le centre au plan de la conique.

Soient AA', BB' les axes et O le centre d'une ellipse plane; OS la perpendiculaire au plan de l'ellipse, Σ une sphère de centre O et de rayon OS = R. L'intersection du cône et de la sphère sera l'ellipse microsphérique.
Voir, Mathesis, loc. cit.

Ellipsimbre. — A la bibliographie, ajouter : C. R. t. LXII, 1866. De la Gournerie.

Entrelacs. — Voir Arabesques.

Enveloppe. — L'enveloppe, ou la courbe enveloppe, est une courbe tangente à toutes les courbes d'une même famille, dont l'équation contient un paramètre variable.

L'enveloppe est le lieu des positions limites des points caractéristiques des enveloppées (Voir Enveloppée)

Enveloppée. — Courbe quelconque appartenant à une famille, dont l'équation contient un paramètre variable, considérée par rapport à l'enveloppe de toutes les courbes de cette famille.

Toute enveloppée est tangente à l'enveloppe.

Le point d'intersection de deux enveloppées consécutives (ou infiniment voisines) se nomme point caractéristique.

Épicycloïde. — a et b désignant les rayons du cercle fixe et du cercle mobile, générateurs de l'épicycloïde, on sait que cette courbe couvre la totalité de la couronne circulaire de rayons a et $a+2b$, si le rapport des deux rayons a et b est incommensurable. L'épicycloïde est alors une courbe transcendante, mais les points où sa tangente est parallèle à une direction donnée se trouvent sur une courbe algébrique, une ellipse concentrique et doublement tangente aux deux cercles de la couronne (Voir, Courbe transcendante)

L'épicycloïde joue en Mécanique un rôle non moins important que celui de la cycloïde. Voir, par exemple, Journal de Liouville, (2) XIII, 1868, pp. 204-204 : Sur le tautochronisme des épicycloïdes quand on a égard au frottement (Haton de la Goupillière).

La bibliographie très complète des Épicycloïdes a été donnée par E. Wölffing (I. M. 1898, 235-238 et 1899, 11-12).

L'invention des épicycloïdes serait due, suivant Leibniz, à Rœmer, et suivant La Hire, à Desargues, mais il est certain que, bien avant Rœmer et Desargues, la description par points de l'épicycloïde à points doubles a été donnée dans l'ouvrage : Alberti Dureri institutionum geometricarum libri quatuor (Arnhemii, 1606), ainsi que l'a remarqué Chasles (Aperçu historique, pp. 529-530) mais ce que Chasles ne relève pas, c'est que Durer a

nommé sa courbe aranea (ou plutôt aranei, pour linea aranei) ou ligne de l'araignée (c'est-à-dire décrite par l'araignée en marche) (I. M. 1899, p. 13).

Les satellites des planètes décrivent autour de celles-ci des orbites elliptiques, que leur faible excentricité permet d'assimiler à des cercles. En conséquence on peut dire que, dans leur mouvement absolu, les satellites décrivent des épicycloïdes. La nature de ces courbes dépend du rapport des deux vitesses de circulation du satellite autour de la planète et de celle-ci autour du soleil. Ce rapport est tel, pour la Lune, que son épicycloïde est allongée, sans boucle ni point de rebroussement, en sorte que le mouvement de la Lune, vu du Soleil, est toujours direct. (L'épicycloïde lunaire n'a même pas de points d'inflexion et présente partout sa concavité au Soleil). Il en est de même pour les 3e, 4e et 5e satellites de Jupiter. Les deux premiers, au contraire, décrivent dans l'espace des épicycloïdes à boucles (H. Faye, Cours d'Astronomie, t. II, p. 283. 1883).

Faisceau de Courbes. — Ensemble des courbes passant par les points communs à deux courbes données $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$ et représenté par l'équation générale

$$f_1 + \lambda f_2 = 0. \quad (1)$$

Un pareil faisceau est dit faisceau ponctuel dépendant des deux courbes données. Son étude, qui a été faite avec détails pour les coniques, est beaucoup plus difficile pour les courbes d'ordre supérieur, et dépend de celle de la hessienne du faisceau.

Si les équations $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$ sont des équations tangentielles, le faisceau (1) prend le nom de faisceau tangentiel dépendant des deux courbes données. Il représente l'ensemble des courbes tangentes aux tangentes communes aux deux courbes considérées.

L'étude d'un faisceau tangentiel est entièrement corrélative de celle d'un faisceau ponctuel, la hessienne tangentielle se substituant à la hessienne ponctuelle.

Voir les traités de Géométrie analytique.

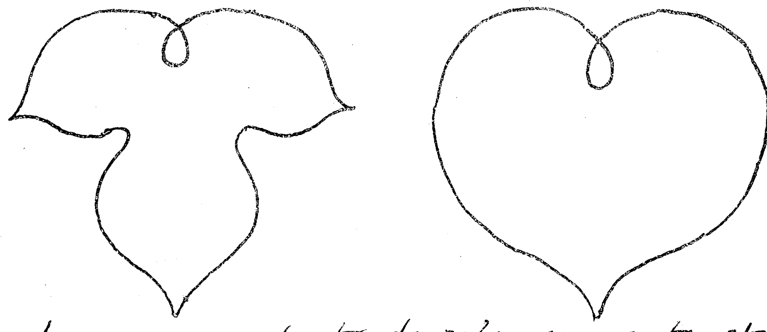
Famille de courbes. — Ensemble des courbes représentées par une équation contenant un ou

plusieurs paramètres variables : $f(x, y, \lambda, \mu, \dots) = 0$.

Une famille de courbes planes n'a d'enveloppe que lorsque son équation ne contient qu'un paramètre variable. Chaque courbe de la famille est alors dite Enveloppée.

<u>Feuilles géométriques.</u> — Les feuilles des plantes, aussi bien que les fleurs, présentent fréquemment des configurations géométriques qui rappellent parfois des courbes connues. Inspiré de cette idée pour les courbes imitant les fleurs, Guido Grandi a publié des études intitulées : Florum geometricorum manipulus (Londres, 1723), et : Flores geometrici (Florence 1728).

On peut trouver, dans la structure des feuilles, un sujet tout semblable de recherches de Géométrie. C'est ainsi, par exemple, que la feuille du liseron belle de jour (convolvulus tricolor) offre deux types de courbes admettant un axe de symétrie et des



nombres correspondants de rebroussements et d'inflexions.

La question paraît plus facile dans toute sa généralité pour les fleurs que pour les feuilles. Les fleurs, en effet, présentent souvent un centre et plusieurs axes de symétrie, tandis que les feuilles (même composées) n'ont pas de centre et n'ont généralement qu'un axe de symétrie. Leur description graphique est donc moins simple. C'est probablement à quoi il faut attribuer le peu de tentatives dans cette voie.

La proposition de rechercher des courbes algébriques douées des mêmes singularités que les feuilles de végétaux et pouvant leur servir de figure géométrique, paraît avoir été faite

pour la première fois dans les Nouvelles Annales de Mathématiques, où les Rédacteurs ont demandé, en 1860 (quest. 539, p. 308) l'équation d'une courbe qui représentât les trois folioles égales du Trifolium pratense (trèfle des prés). Dans la solution qui en a été donnée (N. A. 1894, pp. 58* 59*. H. Brocard) la courbe a été considérée comme une transformée d'une épicycloïde particulière (cardioïde). En réalité, ces sortes de problèmes sont essentiellement indéterminés, et on comprend que d'autres courbes puissent convenir plus ou moins simplement à une solution analogue.

Ces courbes peuvent être appelées courbes botaniques (Gino Loria, Congrès de Zurich. p. 294; 1897), mais l'analogie de la question avec celle des fleurs géométriques suggère très naturellement l'idée de leur donner le nom de feuilles géométriques.

Parmi les études mathématiques faites dans cet ordre d'idées, une notice de B. Habenicht parue à Quedlinburg (18 pages; 1895) mérite une mention particulière. L'auteur y a donné entre autres les résultats suivants:

Feuille du trèfle aigre (oxalis, pain de coucou)

$$r = 4(1+\cos 3\theta) + 4\sin^2 3\theta.$$

Feuille du trèfle ordinaire

$$r = 4(1+\cos 3\theta) - 4\sin^2 3\theta.$$

Feuille du marronnier sauvage

$$r = 2\left(\cos\theta + \sqrt{3+\cos^2\theta}\right) - 6\sin^2 \frac{7\theta}{2} - 0.3\sin^2 60\theta.$$

Feuille du lierre

$$r = 3(1+\cos^9\theta) + 2\cos\theta + \sin^2\theta - 2\sin^2 3\theta \cos^4\frac{\theta}{2}$$

Feuille de l'érable faux-platane

$$r = 10\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2} - 5\left(1+\sin^2\frac{11\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right) + 2\sin^2 11\theta\cos^4\frac{\theta}{2}.$$

Les fruits donneraient aussi matière à des recherches du même genre au point de vue de leurs dispositions géométriques. Les graines de l'hélianthe, par exemple, forment une mosaïque dans laquelle on reconnaît des spirales qui vraisemblablement se rapprochent de la spirale logarithmique.

Il est évident que les vérifications graphiques et les mesures géométriques seront singulièrement facilitées par la photographie, agrandie s'il est nécessaire, des plus réguliers

specimens que l'on pourra se procurer de ces objets d'étude. Voir, par exemple, la photographie de la mosaïque de l'hélianthe, au n° 234 de la Revue encyclopédique Larousse (26 février 1898).

<u>Focale</u>. — On appelle conique focale, ou simplement, focale, une conique lieu de foyers d'une quadrique, c'est-à-dire le lieu des centres de sphères de rayon nul, bitangentes à la quadrique.

Toute quadrique à centre rapportée à ses trois plans principaux

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

possède trois focales, une ellipse et une hyperbole réelles, situées dans deux des plans principaux et une courbe imaginaire située dans le troisième.

Les deux coniques réelles ont pour équations

$$\frac{x^2}{a^2-c^2} + \frac{y^2}{b^2-c^2} = 1$$

et

$$\frac{x^2}{a^2-b^2} + \frac{z^2}{c^2-b^2} = 1.$$

Les foyers réels à plans réels sont dits foyers de première espèce ; les foyers réels à plan imaginaire sont dits foyers de seconde espèce.

Pour l'étude des focales de quadriques, de leurs directrices, etc. voir les traités de Géométrie analytique, et plusieurs travaux de Mac Cullagh.

Dans le cas du cône

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 0,$$

les coordonnées du foyer doivent vérifier les équations

$$\frac{x^2}{A-C} + \frac{y^2}{B-C} = 0,$$

$$z = 0,$$

qui représentent, ou une ellipse réduite au sommet, ou deux lignes droites passant par le sommet et appelées focales du cône.

Parmi plusieurs propriétés de ces droites, il suffira de mentionner leur description géométrique :

Les lignes focales d'un cône sont les perpendiculaires menées par le sommet aux plans cycliques du cône supplémentaire.

Focale d'une surface. — Si l'on circonscrit à une surface quelconque et au cercle imaginaire à l'infini, une surface développable, cette surface a des lignes doubles qui suffisent à la déterminer, et qui s'appellent focales de la surface.

Par chaque tangente à la focale passent deux plans tangents communs à la surface et au cercle isotrope.

Un point quelconque de la focale est un foyer de la surface, c'est-à-dire le centre d'une sphère de rayon nul (ou point-sphère) doublement tangente à la surface.

Focale singulière d'une surface et d'une courbe. — Lorsqu'une surface algébrique passe par le cercle isotrope, on considère, outre les focales ordinaires (Voir Focale d'une surface) les focales appelées focales singulières par E. Laguerre. Elles sont les lignes doubles de la développable circonscrite à la surface suivant le cercle isotrope.

Les focales de tous les cônes circonscrits à une surface donnée sont les droites d'intersection des plans tangents aux deux développables focales de la surface menées par le sommet du cône (G. Darboux).

Comme la définition de focale est tangentielle, les focales d'une courbe quelconque peuvent être déterminées de la même manière que pour les surfaces ; elles sont les lignes doubles de la développable circonscrite à la courbe et au cercle isotrope. Cette développable possède parmi ses lignes doubles la courbe donnée ; les autres sont les focales de la courbe.

Les différentes lignes doubles d'une développable focale sont les focales les unes des autres (Voir : G. Darboux, Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, etc, pp. 8-22 etc. 1873).

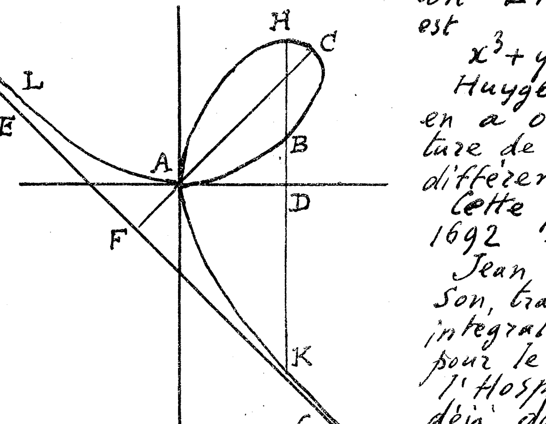
Folium de Descartes. — Roberval détermina la forme de la boucle du folium de Descartes (folium Cartesii), mais il s'imagina que la courbe complète était formée de trois autres boucles égales, ce qui aurait élevé le degré de la courbe au sixième, alors que l'équation du folium était seulement du troisième degré.

Descartes lui-même ne semble point s'être aperçu de l'erreur, ce qui montre que la géométrie des courbes se ressentait de quelque hésitation dans la description des branches infinies, auxquelles aurait dû pourtant faire penser le degré impair de l'équation. Le point anguleux de la boucle considérée comme arc unique de la courbe montrait aussi que la notion de continuité ne se présentait pas alors avec l'importance qu'elle a aujourd'hui. Roberval a peut-être contribué à établir cette notion en complétant la courbe comme il l'a fait, mais il s'est trompé sur la véritable nature de la courbe, ce qui laisse à croire que la discussion des courbes algébriques n'était pas encore bien familière aux mathématiciens.

Quoi qu'il en soit, le folium de Descartes mérite une place à part dans l'histoire des Mathématiques, et il est intéressant de signaler à son sujet les plus anciens résultats de son étude.

Dans les Opera varia d'Huygens, p. 514, on trouve la remarque suivante: « Curva in figura exhibetur, folium ABCH circumscribit et utrimque sese extendit juxta asymptoton EFG. Æquatio ejus est

$$x^3 + y^3 = xya. »$$



Huygens ajoute qu'il en a obtenu la quadrature de trois manières différentes.

Cette pièce paraît de 1692 environ.

Jean Bernoulli, dans son traité du Calcul intégral composé à Paris pour le marquis de l'Hospital, en 1691, avait déjà donné l'équation de la même courbe par rapport à son axe de figure, pour en avoir plus aisément la quadrature. C'est un exemple, assez peu fréquent jusque là, de changement d'axes de coordonnées. (A. Aubry).

L'aire de la boucle du folium est équivalente à l'aire comprise entre la courbe et son

asymptote et a pour expression $\frac{a^2}{6}$.

Le folium admet différents modes de description géométrique. Le plus simple paraît celui qui le définit comme courbe affine de la trisectrice de Mac Laurin par rapport à son axe de symétrie. Les ordonnées de la trisectrice, diminuées dans le rapport de 1 à $\sqrt{3}$, représentent les ordonnées des points correspondants du folium de Descartes.

<u>Folium double</u>. — Voir la figure du premier article. — L'aire de chacune des folioles de la courbe est équivalente à l'aire du cercle générateur ABO.

C'est pour la longueur $OP = \frac{3}{4} AO$ que la tangente en M est parallèle à AO.

<u>Folium parabolique droit</u>. — Voir la figure du premier article.

La courbe (J), obtenue en prenant OJ=IM, est une cubique simple parabolique à point de rebroussement. En d'autres termes, la cissoïdale du folium parabolique droit est la parabole semi-cubique, ou parabole de Neil.

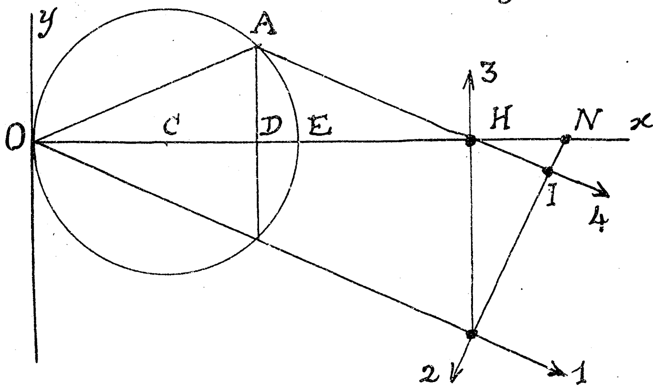
<u>Folium simple</u>. — Voir la figure du premier article. — Si l'on pose $OO = 4a$, la courbe a pour équation polaire

$$r = 4a \cos^3 \theta.$$

C'est aussi l'équation de la podaire de l'hypocycloïde triangulaire par rapport à un de ses points N de rebroussement.

Les deux courbes étant identiques, on en conclut que IH enveloppe une hypocycloïde triangulaire.

Et en effet, cela résulte immédiatement de l'adaptation de la construction (1.2.3.4) à la figure ci-dessous. OEA est le cercle générateur tritangent à l'hypocycloïde. On a EN=OE et DH=OD. L'enveloppe de la droite AH est, comme on sait, une hypocycloïde triangulaire. Voir au mot Trifolium.



Fibre moyenne. — Voir M. d'Ocagne (Cours de Géom. descr. et infinit. 1896, p. 275).
C'est d'ailleurs ce passage qui a provoqué les notes citées (G. de Longchamps et A. Mannheim).
Le théorème ici démontré avait d'abord été donné par M. d'Ocagne dans les Annales des Ponts et Chaussées (2e Sem. 1888, p. 76, et 2e sem. 1894, p. 658) où, suivant la terminologie de J. Résal, la courbe en question est désignée par le nom assez peu justifié d'axe longitudinal. C'est M. d'Ocagne qui a proposé de changer ce nom en celui de fibre moyenne.

Glissette. — Il pourra être intéressant de compléter quelques uns des exemples cités au sujet des glissettes par l'indication de la quadrature de ces courbes.
Voici quelques résultats.
VIII. — Centre d'une ellipse. — Aire $\frac{\pi}{2}(a-b)^2$.
XIII. — Foyers d'une ellipse. — Aire $2\pi a(a-b)$.
XIV. — Sommets d'une ellipse.
Sommets du grand axe: Aire $\pi(a-b)^2+\pi a^2$.
Sommets du petit axe: Aire $\pi(a-b)^2+\pi b^2$.
Note. — Glissette d'un point du plan de l'ellipse, dont les distances aux axes sont α et β:
Aire de chaque ovale: $\pi(a-b)^2+\pi(\alpha^2+\beta^2)$.

Graphique. — Aux exemples cités, on peut ajouter: Statistiques diverses (production du blé et d'autres céréales; trafic des chemins de fer; tonnage des marchandises, etc, etc).

Hélice. — Pour les transformées par enroulement des torons d'une corde, voir I. M. 1895, pp. 330-331 (E. Duporcq).

Hélice isoclinique, et Hélice isogonique. — Dénominations proposées pour désigner les courbes coupant les méridiennes d'une surface de révolution sous un même angle ou faisant un angle constant avec un plan déterminé.
Exemples: 1° la troisième section circulaire du tore (section par le plan bitangent oblique à l'axe)
2° l'antiprojection sphérique d'une épicycloïde intérieure au cercle de l'équateur.
Voir A. F. 1891. (Marseille) 1ère pie Théorie

des hélices p. 160 (Schoelcher).

Hermitienne. — Étant donné un réseau de coniques, la hermitienne, ou courbe hermitienne, ou courbe d'Hermite, est l'enveloppe des droites qui joignent deux à deux les points conjugués l'un de l'autre par rapport au réseau.

La jacobienne d'un réseau de coniques est identique à la hermitienne du réseau tangentiel conjugué, et corrélativement. (Voir Clebsch, Leçons de Géom. t. II. p. 248 et suiv. de la traduct. française).

Hessienne. — La hessienne d'une courbe donnée C^m, de degré m, est le lieu d'un point dont la conique polaire (c'est-à-dire la $(m-2)^{ème}$ polaire) est un couple de droites; ou bien le lieu des points doubles de ses premières polaires. Elle est aussi le lieu d'un point où les deux premières polaires sont tangentes.

Ses caractéristiques sont

$$m' = 3(m-2).$$
$$n' = 3(m-2)(3m-7).$$
$$\delta' = 0.$$
$$\varkappa' = 0.$$
$$\tau' = \frac{27}{2}(m-1)(m-2)(m-3)(3m-8).$$
$$\iota' = 9(m-2)(3m-8).$$

La hessienne donne l'interprétation géométrique du covariant appelé par Sylvester (Phil. Trans. Lond. t. CXLIII, 3e pie p. 545; 1853) hessien, c'est-à-dire du déterminant fonctionnel formé par les deuxièmes dérivées de la fonction (homogène) représentant la courbe donnée: $\varphi(x, y, z) = 0$.

Le hessien d'une conique étant une constante, une conique n'a pas de hessienne; quand le hessien est identiquement nul, la conique est, soit un point, soit l'angle de deux droites, soit un système de deux parallèles (réelles, confondues, ou imaginaires).

Une courbe d'ordre m supérieur à 2 a, en général, une hessienne qui est d'ordre maximum $3(m-2)$ et qui passe par tous les points de la courbe autres que les points simples, c'est-à-dire par tous les points multiples, singuliers, ou d'inflexion. D'où il résulte qu'une courbe d'ordre m ne peut avoir plus de $3m(m-2)$ points

non simples (de toute nature)

Lorsque le premier membre de l'équation de la hessienne est divisible par $\varphi(x.y.z)$, la courbe $\varphi=0$ est un système de droites.

Si le hessien est identiquement nul, les droites sont concourantes et forment un faisceau.

__Hessienne tangentielle__.– Courbe représentée par le hessien, égalé à zéro, de l'équation de la courbe en coordonnées tangentielles.

Le hessien tangentiel d'une conique étant une constante, une conique n'a pas de hessienne tangentielle ; quand le hessien tangentiel est identiquement nul, la conique est, soit une droite (de jonction), soit un système de deux points distincts sur une droite ne passant pas par l'origine, soit un système de deux points (réels, confondus, ou imaginaires) sur une droite passant par l'origine.

Toute courbe de classe m supérieure à 2 a, en général, une hessienne tangentielle, qui est de classe maximum $3(m-2)$ et qui est tangente à toutes les tangentes de la courbe autres que les tangentes simples. D'où il résulte qu'une courbe de classe m ne peut avoir plus de $3m(m-2)$ tangentes non simples (de toute nature).

Lorsque le premier membre de l'équation de la hessienne tangentielle est divisible par la fonction donnée, la courbe φ est un système de points ; si le hessien est identiquement nul, les points sont en ligne droite.

En résumé, la hessienne tangentielle jouit de toutes les propriétés corrélatives de celles de la hessienne ponctuelle.

__Hippopède d'Eudoxe__.– A la bibliographie de cette courbe, ajouter :

H. Künssberg : Der Astronom Mathematiker und Geograph Eudoxos von Knidos. I. Dinkelsbühl, 1888, pp. 48-59, où l'hippopède est l'objet d'une étude détaillée.

__Horicycle__.– En géométrie lobatchefskienne, il existe des surfaces courbes, appelées horisphères, sur lesquelles se trouvent des courbes, appelées horicycles, ayant, sur ces surfaces, les mêmes

propriétés que les droites euclidiennes dans le plan euclidien (Voir les écrits de Lobatchefsky et de Bolyai). (M. 1898, p. 36. P. Mansion).

Note. — Dans le premier Répertoire, on a inscrit inexactement Orycicle. Ce mot est à supprimer et à remplacer par Horicycle.

Huit. — Le huit a pour équation polaire

$$r = \frac{a\sqrt{\cos 2\theta}}{\cos^2\theta},$$

et la lemniscate de Bernoulli,

$$r = a\sqrt{\cos 2\theta}.$$

Les deux courbes présentent de grandes analogies de forme et de tracé ; mais la lemniscate est tout entière à l'intérieur du huit.

L'aire de la lemniscate est a^2 ; celle du huit est $\frac{4}{3}a^2$.

La détermination de la normale en un point M du huit peut se faire assez simplement. Reprenons la construction indiquée.

Soient O le centre d'un cercle AL de rayon a, AK la tangente en A, LK l'ordonnée d'un point L du cercle. On joint OK et l'on mène LM parallèle à Ox. OK et LM se rencontrent au point M du huit.

Soit MP l'ordonnée du point M. On prend sur Ox, $OP' = 2.OP$, et l'on mène P'N perpendiculaire à OM et qui rencontre OAy en N. MN est la normale au point M.

En effet, la courbe (M) ainsi définie a pour équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{2x^2 - y^2}.$$

L'intégration se fait aisément par la substitution $y = ux$ et l'on trouve

$$y^4 = a^2(y^2 - x^2),$$

équation du huit.

Note. — La courbe du huit se rencontre dans plusieurs questions de géométrie.

Aux constructions qui donnent cette courbe, on peut ajouter la suivante :

Soient ALD un cercle de centre O et de

rayon a, deux diamètres rectangulaires Ox, Oy, un point L du cercle projeté en B sur Oy, et la distance BF de B à OL, rabattue en BM sur BL. Le lieu des points M est un huit, car le point M a pour coordonnées

$$y = a \sin u, \quad x = a \sin u \cos u,$$

u désignant l'angle LOD.
On en tire

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

ou

$$y^4 = a^2(y^2 - x^2).$$

(E.-N. Barisien).

Hyperbole d'Apollonius. — Le nom désigne généralement l'hyperbole équilatère qui passe par les points d'incidence des normales menées, d'un point (α, β), à une conique quelconque. Si la conique a pour équation, en coordonnées rectangulaires,

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

l'hyperbole d'Apollonius, ou hyperbole des pieds des normales, aura pour équation

$$B(x^2 - y^2) - (A - C)xy + (A\beta - B\alpha + E)x - (B\beta - C\alpha - D)y + D\beta - E\alpha = 0.$$

Note. — Dans la langue de Fermat (Œuvres, t. I, p. 256, 1) la dénomination d'hyperbole d'Apollonius désigne simplement l'hyperbole ordinaire, par opposition aux hyperboles de divers ordres,

$$y^m x^n = p,$$

imaginées par Fermat, de même que les paraboles de divers ordres

$$y^m = p x^n.$$

Ces généralisations du sens des mots hyperbole et parabole, ont été conservées par Duhamel (Élém. de Calcul infinit.)

Hyperbole de Feuerbach. — Comme addition à ce qui a été dit de cette courbe, on peut signaler qu'elle passe par le point de Gergonne, et qu'elle a pour équation, en coordonnées barycentriques,

$$\Sigma\, a(b-c)(p-a)\,\beta\gamma = 0.$$

Hyperbole de Jerabek. — Cette hyperbole équilatère est la transformée, par droites symétriques, de la droite d'Euler OGH. Elle passe, notamment, par les points O, H, inverses l'un

de l'autre, et par le point K (point de Lemoine) inverse du barycentre G.

Le centre de cette hyperbole a pour coordonnées barycentriques $(b^2-c^2)^2(b^2+c^2-a^2)$, etc.

Hyperbole de Kiepert. — Hyperbole équilatère circonscrite au triangle ABC et passant par le barycentre G. Elle passe, en outre, par l'orthocentre H (comme toute hyperbole équilatère circonscrite), par le point de Tarry (N), par le réciproque du point de Lemoine, par le point de l'ellipse de Steiner (circonscrite) ayant pour coordonnées barycentriques

$$\left(\frac{1}{b^2+c^2-2a^2}\right),\ \text{etc.},$$

par le centre de gravité du périmètre du triangle ABC, et par une infinité d'autres points remarquables.

Son équation est, en coordonnées barycentriques,

$$(b^2-c^2)\beta\gamma+(c^2-a^2)\gamma\alpha+(a^2-b^2)\alpha\beta=0.$$

Son centre est au point $[(b^2-c^2)^2, (c^2-a^2)^2, (a^2-b^2)^2]$ situé à l'intersection du cercle d'Euler et de la droite GR qui joint le barycentre au point de Steiner, et qui a pour équation

$$\sum(b^2+c^2-2a^2)\alpha=0.$$

L'hyperbole de Kiepert peut se définir, aussi l'arguésienne du diamètre de Brocard OK et la courbe réciproque de la droite GK ou

$$\sum(b^2-c^2)\alpha=0$$

qui joint le point de Lemoine au barycentre.

Si A' B' C' sont les sommets de trois triangles isoscèles semblables construits sur les côtés du triangle ABC, les droites AA', BB', CC' concourent en un point M dont le lieu est l'hyperbole de Kiepert.

Hyperbole équilatère. — L'hyperbole ordinaire n'a pas de diamètres conjugués égaux, chaque asymptote est un diamètre singulier, conjugué des cordes qui lui sont parallèles; mais, lorsque les asymptotes sont rectangulaires l'hyperbole est dite équilatère, qualification qui lui a été donnée pour rappeler sa propriété caractéristique, que tout diamètre est égal à son conjugué sur l'hyperbole conjuguée.

Si l'équation d'une conique est donnée sous la forme

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

cette conique sera une hyperbole équilatère si l'on a la condition

$$A + C - 2B\cos\theta = 0,$$

θ étant l'angle des axes supposés obliques, ou simplement

$$A + C = 0,$$

les axes étant rectangulaires.

Si une conique est circonscrite à un triangle ABC, on trouve que la même condition algébrique exprime à la fois que les asymptotes sont rectangulaires ou que la conique passe par l'orthocentre H. On en conclut que

Toute hyperbole équilatère circonscrite à un triangle ABC passe par l'orthocentre H,

et, réciproquement, que

Toute conique circonscrite à un triangle ABC et passant par l'orthocentre H est une hyperbole équilatère.

Pour une monographie de l'hyperbole équilatère, voir Z. 1884, p. 534. A. Mikikowski.

<u>Hyperboles diverses.</u> — Plusieurs dénominations ont été données par Newton, puis par G. Salmon, aux branches hyperboliques des cubiques tripartites, suivant la disposition des branches par rapport aux asymptotes.

En voici l'indication sommaire, en supprimant toute description, que la figure ci-jointe aide à faire comprendre immédiatement.

	I. Newton	G. Salmon
I.	Hyperbole inscrite.	Hyperbole simple.
II.	Hyperbole circonscrite.	Hyperbole infléchie.
III.	Hyperbole ambigène.	Hyperbole doublement infléchie.

De même, Newton a désigné certaines cubiques sous les dénominations suivantes :

Hyperboles redondantes, les cubiques à trois branches hyperboliques ;

Hyperboles défectives, les cubiques à une seule branche infinie ;

Hyperboles paraboliques, les cubiques tangentes

à la droite de l'infini et ayant en outre une asymptote à distance finie.

Voir G. Salmon, Courbes planes, pp. 244-245.

Ces diverses dénominations sont peu employées et pour ainsi dire tombées en désuétude. Il est bon cependant de les rappeler, ne serait-ce qu'à titre de renseignement.

Note. — Pour d'autres acceptions des noms d'hyperbole et de coniques, voir aussi Ellipses de divers ordres ou degrés.

<u>Hyperbolisme.</u> — Ancienne qualification proposée et employée par Newton dans son ouvrage Enumeratio linearum tertii ordinis (1701).

Si

$$y = \varphi(x)$$

est l'équation d'une courbe quelconque, Newton appelle la courbe

$$xy = \varphi(x)$$

un hyperbolisme de cette courbe. Ainsi, il appelle les cubiques représentées par l'équation

$$(1) \qquad xy^2 + ey = cx + d$$

des hyperbolismes de l'ellipse, de l'hyperbole, ou de la parabole, puisque l'équation (1) devient celle d'une conique quand on remplace xy par y :

$$y^2 + ey = cx + d.$$

Voir G. Salmon, Courbes planes, p. 254.

<u>Hyperconique.</u> — On a désigné sous le nom d'hyperconiques (ellipse ou hyperbole logarithmique) les quartiques gauches, intersections d'un paraboloïde de révolution

$$x^2 + y^2 = 2mz$$

avec le cylindre elliptique ou hyperbolique

$$b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2.$$

Ces courbes ont reçu aussi le nom d'ellipse (ou d'hyperbole) logarithmique, parce que la différence de deux arcs associés se réduit à une intégrale logarithmique.

Les équations paramétriques sont, pour l'ellipse logarithmique,

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi, \quad z = \frac{1}{2m}(a^2 - c^2\sin^2\varphi),$$

et pour l'hyperbole logarithmique,

$$x = a\,\mathrm{ch}\,u, \quad y = b\,\mathrm{sh}\,u, \quad z = \frac{1}{2m}(c^2\,\mathrm{ch}\,u - b^2),$$

sh et ch désignant les sinus et cosinus hyperboliques.

Puisque un plan parallèle à l'axe du paraboloïde coupe cette surface suivant une parabole dont la

projection sur la base du [illegible]ndre est une droite, les propriétés descriptives des coniques peuvent être étendues aux hyperconiques, en substituant aux droites des arcs paraboliques, par exemple, le théorème de Pascal devient le suivant :

Si un hexagone ayant pour côtés des arcs paraboliques est inscrit dans une hyperconique, les côtés opposés se coupent deux à deux sur une parabole (J. Booth. Phil. Trans. of the R. S. of London for 1852, 2e pie p. 311).

__Hypercycle.__ — L'hypercycle peut être considéré aussi comme une anticaustique par réfraction d'une parabole, les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe.

Pour la bibliographie, voir : E. Laguerre, Sur les hypercycles (C. R. 20, 27 mars; 3, 10, 24 avril 1882); Sur la Géométrie de direction (S. M. t. VIII, 1879-1880; pp. 196-208).

__Hypocycloïde à quatre rebroussements.__ Ainsi qu'il a été observé à l'article : Cubo-cycloïde, la dénomination d'hypocycloïde à quatre rebroussements est tout à fait impropre et inexacte ; il vaudrait mieux la rejeter et la remplacer définitivement par Astroïde.

En réalité, le nombre de rebroussements qui caractérisent cette courbe est de six, et non de quatre.

__Hypocycloïde à trois rebroussements.__ — Les équations paramétriques de cette courbe peuvent s'écrire

$$x = \frac{2a\lambda}{(1+\lambda^2)^2}, \quad y = \frac{a(3\lambda^2+1)}{(1+\lambda^2)^2}$$

(J. S. 1884, p. 169; M, 1888, p. 165; G. de Longchamps).

Pour diverses propriétés géométriques, voir aussi :

Sur une trisectrice remarquable (M. 1888, pp. 5-10 ; G. de Longchamps).

Sur l'hypocycloïde de Steiner (C. R, t. CXXV, 1897, pp. 404-406 ; P. Serret, qui cite Gemona (Crelle, t. LXIV, pp. 101-123) et renvoie aussi à un article des C. R. du 7 janvier 1878 (P. Serret).)

Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements (C. R. t. CXXV, 1897, pp. 423-426, 445-448, 459-461; P. Serret).

Question 603 (M. 1888, p. 28): On considère les paraboles qui ont même corde normale NN' (N et N' étant des points fixes). Démontrer 1° que l'axe enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements; 2° que la directrice enveloppe une parabole. (Jerabek). — Solutions M. 1888, pp. 164 et 234).

Note. — L'étude de l'hypocycloïde à trois rebroussements a fait l'objet d'un très grand nombre de travaux, et l'élégance particulière de ses propriétés géométriques a entraîné Cremona à lui donner le nom de Courbe merveilleuse (M. 1888, p. 5, G. de Longchamps).

__Image__. — Parmi différentes acceptions de ce mot en Mathématiques, en voici deux qui lui sont données fréquemment.

Si

$$f(x+iy) = X + iY$$

est une fonction monogène, et si l'on fait décrire au point (x, y) une courbe quelconque, le point (X, Y) décrit une courbe correspondante que Gauss appelle l'image de la première (Ch. Hermite, Cours de la Faculté des Sciences de Paris; rédact. Andoyer; 1882).

Le mot image a aussi été employé par Gauss dans la théorie des surfaces. Il désigne en général une courbe sphérique.

Considérons dans l'espace une sphère de rayon 1 et une portion de surface S quelconque terminée à une courbe fermée, C. Menons à la surface S des normales tout le long de la courbe C et, dans la sphère, des rayons parallèles à toutes ces normales. Ils formeront un cône qui coupera la sphère suivant une courbe appelée image sphérique de C.

Voir, par exemple, Rouquet (thèse, 1882).

__Indicatrices d'un point__. — On appelle ainsi les deux droites tangentes que l'on peut mener par le point à sa conique polaire.

La courbe fondamentale et sa hessienne forment ensemble le lieu d'un point dont les deux indicatrices se confondent en une même droite.

Sur une droite quelconque, il y a $2(n-2)$ points dont la droite est indicatrice, n étant l'ordre de la courbe fondamentale.

Les indicatrices des points d'une courbe d'ordre m par rapport à une deuxième courbe (fondamentale) d'ordre n, enveloppent une courbe de

classe $2m(n-1)$ qui est tangente à la courbe fondamentale aux points où elle coupe la courbe d'ordre m' (Cremona, Curve piane, §§ 90.c, 112.b, 114).

Étant donnés, sur une droite, trois points A, B, C et une origine O, si l'on forme les trois quatrièmes proportionnelles aux segments OA, OB, OC, la somme des droites obtenues n'est jamais égale à OA+OB+OC, quand les points A, B, C sont tous réels, mais la propriété peut exister si deux de ces points sont imaginaires conjugués.

Par tout point O du plan d'une cubique (non situé sur la courbe), on peut mener deux droites rencontrant la cubique en des points A, B, C, qui, avec le point O, jouissent de la propriété ci-dessus; ou l'on n'en peut mener aucune (M; 1898, p. 264; quest. 1196; M. Stuyvaert).

Ces deux droites sont les tangentes menées par O à la conique polaire de O par rapport à la cubique. Ces droites, appelées indicatrices du point O, par rapport à la cubique, jouissent de propriétés fort intéressantes, pour lesquelles on consultera les ouvrages de Clebsch et de Cremona (Voir loc. cit. et Crelle, t. LVIII, pp. 280-285). (V. Retali).

Indicatrice (seconde). — L'indicatrice sphérique étant la trace, sur une sphère de rayon 1, des rayons parallèles aux tangentes à une courbe gauche, l'indicatrice sphérique nouvelle de l'indicatrice sphérique déjà obtenue est appelée seconde indicatrice de la courbe primitive (Voir H. Laurent, Traité d'Analyse, t. VII, p. 71).

La seconde indicatrice d'une courbe fermée partage la sphère en deux parties égales (théorème de Jacobi).

Isodyname. — Autre nom des lignes isodynamiques, que l'on considère dans la théorie du magnétisme terrestre.

Il est utile, en parlant de ces lignes, de citer leurs deux noms, car l'un n'est pas moins employé que l'autre.

Comme ouvrage où le mot Isodyname est seul employé, on peut citer le livre de R. Radau: Le Magnétisme, où l'on trouvera plusieurs cartes géographiques relatives aux lignes magnétiques terrestres.

Isotrépente. — Comme exemples de courbes isotrépentes, on peut citer, d'après Euler, l'ellipse et la spirale logarithmique.

Isophote. — Le problème des isophotes a été traité par Burmester (Z. S. XIII 1868 et XIV. 1869).

Jacobienne. — La jacobienne (de trois courbes) est le lieu des points tels que leurs polaires rectilignes, par rapport à trois courbes quelconques données, soient concourantes.

Ce lieu géométrique a reçu le nom de Jacobienne, en l'honneur de Jacobi, qui l'a étudié pour la première fois.

Les équations des trois courbes, de degrés m, n, p, respectivement, étant

$$f_1(x, y, t) = 0, \quad f_2(x, y, t) = 0, \quad f_3(x, y, t) = 0.$$

l'équation de la jacobienne, de degré maximum $(m-1)(n-1)(p-1)$, sera

$$\begin{vmatrix} f'_{1x} & f'_{1y} & f'_{1t} \\ f'_{2x} & f'_{2y} & f'_{2t} \\ f'_{3x} & f'_{3y} & f'_{3t} \end{vmatrix} = 0.$$

La jacobienne passe par tous les points doubles des trois courbes et de toute courbe faisant partie du réseau ponctuel dépendant des trois courbes données et qui a pour équation

$$F = \lambda f_1 + \mu f_2 + \nu f_3 = 0.$$

Lorsque les trois courbes f_1, f_2, f_3, sont des coniques, les points doubles du réseau F sont les sommets des angles faisant partie du réseau. La jacobienne est alors du troisième degré. Elle se réduit à une conique homothétique, si f_1, f_2, f_3 sont elles-mêmes des coniques homothétiques; si f_1, f_2, f_3 sont des cercles, la jacobienne devient le cercle orthotomique (Voir ce mot).

La courbe corrélative de la jacobienne est la cayleyenne (Voir ce mot).

Pour les jacobiennes et l'étude des réseaux en général, voir les traités de Géométrie analytique, et notamment les Leçons de l'Agrégation par G. Kœnigs.

Kampyle d'Eudoxe. — Cette courbe a aussi été l'objet d'une étude de H. Künssberg pp. 44-56 de la seconde partie de sa monographie sur Eudoxos, déjà citée à l'article Hippopède

d'Eudoxe (Dinkelsbühl, 1890).

<u>Kreuzcurve</u>. — La Kreuzcurve déduite d'une conique

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a pour équation

$$\frac{a^2}{x^2} \pm \frac{b^2}{y^2} = 1.$$

L'aire comprise entre une Kreuzcurve et ses asymptotes est la même pour les deux courbes, et a pour expression $4ab$: elle est donc équivalente à l'aire du rectangle formé par les asymptotes.

Si l'ellipse se transforme en un cercle, de rayon a, la Kreuzcurve a pour équation

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}.$$

Notes. — 1. — La définition géométrique de la Kreuzcurve, donnée par Terquem (N. A. 1847, p. 394) comme polaire réciproque de la développée de l'ellipse par <u>rapport</u> à un cercle concentrique (de rayon $c = \sqrt{a^2 - b^2}$) peut servir pour la détermination de ses caractéristiques plückériennes. (M. 1894, pp. 49-50. V. Retali. — A propos de la quest. 829 : En chaque point M d'une ellipse donnée, on construit le centre de courbure μ de l'hyperbole homofocale qui passe en M. Trouver le lieu géométrique du point μ. (Réponse : une Kreuzcurve) (J. Neuberg) (M. 1893, p. 103, et 1894, pp. 47-50).

2. — Les dénominations de cruciale de cercle, cruciale d'ellipse, et cruciale d'hyperbole auraient l'avantage d'être simples et de rappeler la nature de chacune des courbes ainsi définies. En tous cas, la dernière, celle de cruciale d'hyperbole, paraîtrait pouvoir être substituée à celle de Kohlenspitzencurve.

<u>Kukumaeide</u>. — Cette dénomination est un exemple de la façon illogique dont en Europe on enseigne et pratique la prononciation et la transcription du grec.

D'ailleurs, le rapprochement entre une courbe à branches infinies et des graines de végétal, pour désigner une partie de la courbe est difficile à justifier.

Il semble que l'on eût pu trouver aisément

d'autres termes de comparaison, mais le sujet en lui-même ne semble pas mériter de fixer plus longtemps l'attention.

Lemniscate. — La lemniscate de Bernoulli, ou simplement lemniscate, est la podaire centrale de l'hyperbole équilatère. Pour cette raison, elle a reçu aussi le nom de lemniscate hyperbolique, mais il vaut mieux réserver cette dénomination à la podaire centrale de l'hyperbole ordinaire.

La lemniscate a une grande importance en Analyse, en Géométrie, et en Mécanique. Abel a montré que sa division en parties égales pouvait être faite avec la règle et le compas.

La lemniscate a pour équation polaire

$$r = a\sqrt{\cos 2\theta}.$$

La courbe a trois points doubles d'inflexion, dont deux sont les ombilics du plan.

Son aire a pour valeur a^2.

La lemniscate est la polaire réciproque de l'astroïde (V. Retali).

Pour diverses propriétés, voir aussi :

N. A. 1855, pp. 305-310 : Modes de génération des cassinoïdes et des lemniscates. Garlin.

Journal de math. élém. et spéc. t. V. 1881, pp. 559-560 (Deux circonférences C et C' passant par l'origine et dont les centres c, et c', sont sur des droites symétriques par rapport à Ox, rencontrent la lemniscate en quatre points concycliques. — Si le cercle de ces 4 points coupe orthogonalement l'un des cercles C ou C', le lieu du point d'intersection M des cercles C et C' est une droite OM passant par l'origine.).

Lemniscate elliptique (ou hyperbolique). — Podaire de l'ellipse (ou de l'hyperbole) par rapport au centre.

On l'obtient aussi en projetant orthogonalement sur le plan xOy l'intersection du cône elliptique (ou hyperbolique)

$$a^2x^2 \pm b^2y^2 = 4m^2z^2$$

avec le paraboloïde de révolution

$$x^2 + y^2 = 2mz.$$

Ces courbes sont rectifiables par les intégrales elliptiques de troisième espèce.

Note. — Le nom de lemniscate hyperbolique a été quelquefois attribué à la lemniscate de

Bernoulli (N. A. 1855, p. 305, Garlin) mais cela suppose l'hyperbole équilatère. Ce qui vient d'être dit prouve que cette dénomination doit s'appliquer exclusivement à la podaire de l'hyperbole ordinaire, de façon qu'il ne puisse en résulter d'équivoque.

Lemniscate projective. — Désignation abrégée de quartique avec trois points doubles d'inflexion.

La lemniscate projective et l'astroïde projective (courbe de la quatrième classe avec trois tangentes doubles cuspidales) étant réciproques, chaque propriété (projective) de la lemniscate de Bernoulli en donne une de l'astroïde ordinaire.

Les considérations basées sur cette proposition permettent de résoudre la question suivante: Une tangente à l'astroïde recoupe la courbe en M, M'. Quel est le lieu des points de rencontre N des tangentes menées en M et M' à la courbe?

Le lieu demandé est le cercle circonscrit à l'astroïde.

(I. M. 1898, pp. 68-69. V. Retali.)

Ligne. — Il est fréquent de voir les mots ligne et courbe s'échanger mutuellement et sans cause apparente; il sera donc utile de chercher à l'un de ces paragraphes ce qui n'aura pas été mentionné dans l'autre.

Il peut même arriver que le qualificatif donné à ligne ou à courbe soit pris substantivement et remplace à lui seul les dénominations renfermant les mots ligne ou courbe. Par exemple: isotherme désigne aussi bien ligne et courbe isotherme; cycloïdale est équivalent à ligne et courbe cycloïdale; etc. Cependant, il n'est pas toujours indifférent d'employer les mots ligne et courbe avec certains qualificatifs; à cet égard, l'usage courant a fixé le choix devenu définitif.

Ligne affine. — Les lignes (ou courbes) affines ont leurs ordonnées proportionnelles.

Exemples: L'ellipse et les cercles concentriques bitangents; le folium de Descartes et la trisectrice de Mac-Laurin; les courbes appelées par Fermat cycloïdes allongées ou raccourcies; etc.

Voir Courbe affine.

<u>Ligne asymptotiques</u>. — Les lignes asymptotiques d'une surface sont tangentes en chaque point de la surface aux asymptotes de l'indicatrice.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une ligne tracée sur une surface soit asymptotique est que la tangente en un point, qui est perpendiculaire à la normale à la surface en ce point, le soit aussi à la normale en un point infiniment voisin de la ligne.

A la bibliographie des lignes asymptotiques, ajouter :

Lelieuvre : Sur les lignes asymptotiques et leur représentation sphérique ; (B. D. 1888, 1re pie pp. 126-128)

et, comme développement à cet article :

E. Goursat : Sur les lignes asymptotiques (S. M. t. XXIV. 1896 ; pp. 43-51).

<u>Ligne bissectrice</u>. — Etant donnée une surface rapportée à des coordonnées curvilignes, on appelle lignes bissectrices, des lignes tracées sur cette surface, et bissectrices des angles des lignes coordonnées.

Exemples : Si les lignes asymptotiques sont lignes coordonnées, les lignes bissectrices sont les lignes de courbure.

Si, sur la sphère, on prend pour lignes coordonnées les méridiens et les parallèles, les lignes bissectrices sont des loxodromies.

<u>Ligne brisée transcendante</u>. — En raison de l'intérêt de cette partie du Répertoire des lignes géométriques, il nous paraît utile d'y ajouter de nouveaux exemples, empruntés aux applications du Calcul différentiel et intégral à la Physique mathématique.

Déjà Lacroix, dans le Traité élémentaire de Calcul différentiel publié en 1802, a observé (pp. 555-556) que toute équation

$$y = \varphi\left(\sin\frac{2\pi x}{\Delta x},\ \cos\frac{2\pi x}{\Delta x}\right)$$

donne lieu à des lignes qui satisfont aux conditions des contours sinueux brisés périodiques.

A quelque temps de là, Fourier, dans le Traité de la chaleur, publié en 1822, a étudié plusieurs exemples dont voici le résumé.

Plusieurs exemples de lignes brisées transcendantes sont discutés dans le Traité de la Chaleur par Fourier (1822).

Ainsi, § 178, p. 176, l'équation

$$y = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + \cdots$$

appartient à une ligne composée de droites séparées, dont chacune est parallèle à Ox et égale à π, à distance de cet axe égale à $\frac{\pi}{4}$, alternativement au-dessus et au-dessous, et jointes par des perpendiculaires qui font elles-mêmes partie de la ligne.

Cette ligne est la limite des différentes courbes que l'on obtiendrait en augmentant successivement le nombre des termes.

Le principe de ces séries paraît dû à Euler, qui a connu la série

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots$$

citée par Fourier au § 216, p. 227.

L'analyse précédente donnant le moyen de développer une fonction quelconque en série de sinus ou de cosinus d'arcs multiples, nous l'appliquerons facilement au cas où la fonction à développer a des valeurs déterminées lorsque la variable est comprise entre de certaines limites et a des valeurs nulles, lorsque la variable est comprise entre d'autres limites. (§ 226, p. 243).

On peut étendre (§ 227, p. 245) la même analyse au cas où l'ordonnée représentée par φx serait celle d'une ligne composée de différentes parties, dont les unes seraient des arcs de courbes et les autres des lignes droites... Ainsi le second membre de l'équation suivante est représenté par une ligne composée d'arcs paraboliques et de lignes droites:

$$\frac{1}{2}\varphi x = \frac{1}{2.3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\cos x}{1^3} + \frac{\cos 3x}{3^3} + \cos\frac{5x}{5^3} + \cos\frac{7x}{7^3} + \cdots\right\}$$

$$+ \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \frac{\cos 6x}{6^2} - \cdots$$

§ 228, p. 246, il est dit: On pourra trouver de la même manière le développement d'une fonction de x qui exprime l'ordonnée du contour d'un trapèze.... Exemple:

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x = 2\left\{\sin\alpha \sin x + \frac{1}{3^2}\sin 3\alpha \sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5\alpha \sin 5x + \cdots\right\}$$

$\varphi x = x$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \alpha$;
$\varphi x = \alpha$ depuis $x = \alpha$ jusqu'à $x = \pi - \alpha$;

$\varphi x = \pi - x$ depuis $x = \pi - \alpha$ jusqu'à $x = \pi$.

Si l'on supposait $\alpha = \frac{\pi}{2}$, le trapèze se confondrait avec le triangle isoscèle, et l'on aurait, comme précédemment, pour l'équation du contour de ce triangle :

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x = 2\left(\sin x + \frac{1}{3^2}\sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5x + \dots\right)$$

série qui est toujours convergente, quelle que soit la valeur de x.

En général, les suites trigonométriques auxquelles nous sommes parvenus, en développant les diverses fonctions, sont toujours convergentes, mais il ne nous a point paru nécessaire de le démontrer ici.

§ 229, p. 247, Fourier donne l'équation de la surface d'une pyramide quadrangulaire ayant pour base un rectangle $(0\pi, \frac{1}{2}\pi)$, et pour sommet l'extrémité de la perpendiculaire de longueur $\frac{1}{2}\pi$, élevée à la base, par le milieu du grand côté. L'équation de la surface de ce polyèdre entre les limites $x=0$, $x=\pi$, $y=0$, $y=\frac{\pi}{2}$, est

$$\frac{1}{2}\pi z = \frac{\sin x \sin y}{1^2} + \frac{\sin 3x \sin 3y}{3^2} + \frac{\sin 5x \sin 5y}{5^2} + \dots$$

Les suites formées de sinus ou de cosinus d'arcs multiples sont donc propres à représenter entre des limites déterminées toutes les fonctions possibles, et les ordonnées des lignes ou des surfaces dont la loi est discontinue. Non seulement la possibilité de ces développements est démontrée, mais il est facile de calculer les termes des séries : la valeur d'un coefficient quelconque dans l'équation

$$\varphi x = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \dots + a_i \sin ix + \dots$$

est celle d'une intégrale définie, savoir

$$\frac{2}{\pi}\int \varphi x \sin ix \, dx$$

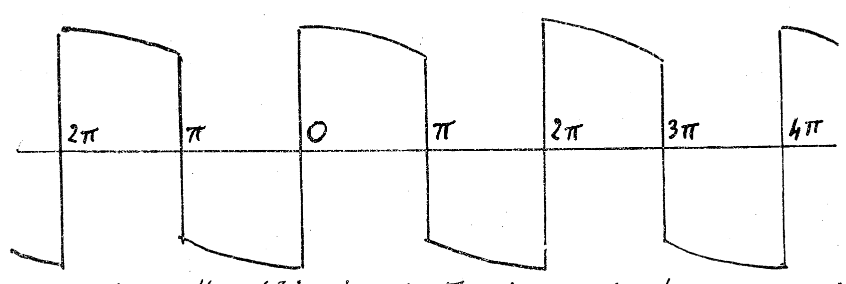
Quelques lignes plus loin, Fourier donne un exemple d'équation.

§ 232, il dit : On peut trouver l'équation d'une ligne brisée qui renferme une courbe et des droites :

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x = \sin x \int_0^\pi \varphi x \sin x \, dx + \sin 2x \int_0^\pi \varphi x \sin 2x \, dx + \dots$$

Le premier arc est quelconque et se reproduit par symétrie alternée de part et d'autre de Ox.

(Cet exemple est reproduit dans la Physique mathématique de Mathieu, p. 32).



Toute cette théorie de Fourier est résumée aussi dans le Ch. XVIII du Calcul intégral de Duhamel.

D'autres exemples se trouvent dans l'ouvrage de Cournot (Corresp. entre l'Alg. et la Géom. 1847, pp. 332–335, 341, 343) (Voir le premier article)

Une équation différentielle, n'admettant pas d'intégrale en termes finis, peut également avoir comme représentation géométrique une ligne brisée transcendante. C'est, par exemple, le cas de la courbe qui, en chacun de ses points, a la propriété que la somme de la sous-normale (yy') et de la sous-tangente ($\frac{y}{y'}$) est constante (a). Cette ligne est donnée par l'équation différentielle

$$yy' + \frac{y}{y'} = a$$

ou

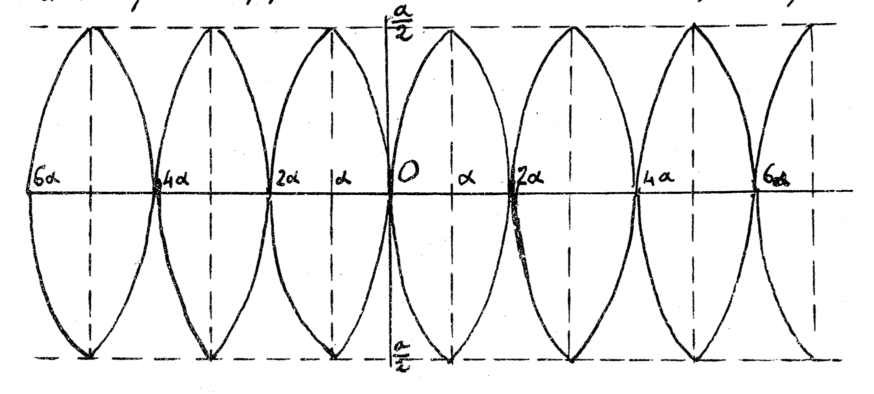
$$y(1+y'^2) = ay'$$

dont on tire

$$y' = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4y^2}}{2y}.$$

Si l'on suppose la courbe partant de l'origine, on voit que pour $x=0$, $y=0$, $y'=\infty$; y' ne peut s'annuler, et devient égal à 1 pour $y=\frac{a}{2}$, maximum de y.

La courbe est symétrique par rapport à Ox et aussi par rapport à la droite (inconnue) $x=\alpha$ pour



laquelle $y = \frac{a}{2}$. Elle se compose donc d'une infinité de lentilles bi-convexes juxtaposées.

On peut avoir une nouvelle donnée sur la forme de ces arcs.

En effet, le rayon de courbure a pour expression

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Mais, de l'équation

$$y(1+y'^2) = ay'$$

on déduit $1+y'^2$ et y'' d'où

$$R = \sqrt{\frac{2a(a^2-4y^2)}{a+\sqrt{a^2-4y^2}}}.$$

Ainsi, au point $y=0$, on a $R=a$ (R est égal à la sous-normale), et, au point $y=\frac{a}{2}$, $R=0$. La développée de la courbe part de l'extrémité de l'arc située sur $y = \pm\frac{a}{2}$.

Cela posé, étant tracées deux droites rectangulaires AM, BM, à $\pm 45°$ sur Ox, leur intersection M sera à une distance MP que nous prendrons pour demi paramètre, $\frac{a}{2}$. Les arcs de courbe se termineront sur les droites MS, $M'S'$ parallèles à Ox aux distances $\pm\frac{a}{2}$.

Au-delà du point A, mais près de lui, prenons sur Ox un point D, puis, en retour, $DO = 2MP = a$; si nous traçons un arc MFD tangent en M à MA et en D à Ox, et tel que sa longueur MFD soit égale à a, l'arc MFD représentera la développée de la courbe OM.

La courbe OM, bien que non déterminée par une équation finie, présente encore une autre propriété

géométrique assez digne d'attention et que voici :

La parallèle à la tangente en T à la courbe, menée par l'origine O, et la parallèle à Ox, menée par le point T, se rencontrent en un point L dont le lieu est un cercle C de rayon $OC = \frac{a}{2}$, tangent à Oy en O.

(Voir Mém. de la Soc. R. des Sc. de Liège : Sur une transformation géométrique (1899) H. Brocard; et Supplément à Mathesis. 1899).

Remarque. — L'analyse qui précède ne fournit aucune indication sur la relation entre a et l'abscisse maxima OP. Mais la condition AO < AM donne

$$\alpha + \frac{a}{2} < \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

d'où

$$\alpha < 0.207107.$$

D'autre part, le point M est à l'intérieur du cercle OI, de rayon a, tangent en O à Oy. La condition EM > EI donne

$$\alpha > \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

ou

$$\alpha > 0.133975.$$

Si donc $a = 1$, on voit que le point M est situé dans un intervalle qui a pour longueur

$$\delta = 0.073132,$$

δ étant la différence entre les deux limites trouvées pour α.

Note. — A la bibliographie du sujet, on peut ajouter que les lignes brisées se rencontrent aussi dans l'étude de certaines fonctions arithmétiques. Il en a été mentionné une à l'article Courbe polygonale. (C. R. t. CXXVII, 1898, pp. 1005-1007 : D. Gravé : sur les lignes composées de parties rectilignes.)

Ligne connodale. — Lorsqu'un plan bitangent se meut sur une surface qu'il touche doublement, il peut arriver que les deux points de contact viennent à coïncider. Ces sortes de points s'appellent points de plissement. Ces points se trouvent tant sur la courbe spinodale (lieu de rebroussements) que sur la courbe flecnodale (lieu d'inflexions). Si le plan bitangent roule sur la surface, deux points de contact (connodes) se meuvent sur la ligne connodale.

Pour l'étude complète de ces diverses lignes, voir D.-J. Korteweg (3e Congrès néerl. de Physi-

que; Utrecht, 1891 : Sur les particularités de 1er ordre qui se présentent à l'apparition et à la disparition d'un pli ; 144-149.

Arch. néerl. t. XXIV, 1891 : sur les points de plissement ; 57-98.

La théorie générale des plis de la surface ψ de Van der Waals dans le cas de symétrie ; 295-368.

<u>Ligne de force</u>. — Les lignes de force sont des lignes telles qu'en tous leurs points la force leur est tangente. Elles coupent orthogonalement les surfaces équipotentielles.

Une ligne de force n'est pas, comme on pourrait le croire, le chemin suivi par un point abandonné à lui-même et sollicité par la force considérée. Une ligne de force ne peut jouir de cette propriété que si elle est droite (M. 1891, 253-254 ; Wasteels).

Indications bibliographiques. — H. Roever. Geometrical properties of the lines of force proceeding from, etc (Trans. of the Acad. of Sc. of S Louis. - U.S.A. - t. VII. 1896). — L'auteur établit les quatre propositions suivantes :

La courbe représentant la ligne de force provenant de l'action d'un système électrisé composé

1° de deux droites parallèles ;
2° de deux points ;
3° d'un plan et d'une droite parallèle ;
4° d'un plan et d'un point ;

est le lieu de l'intersection de deux droites animées de mouvements

1° de rotation uniforme, mais de vitesses différentes autour de ces deux droites pour axes (201-217)

2° de rotations dans un même plan autour de deux parallèles menées par ces deux points, de façon que les sinus-verses de leurs inclinaisons sur le plan varient uniformément dans des rapports donnés (217-228).

3° dans un plan perpendiculaire à la droite donnée ; une des droites tourne d'un mouvement uniforme autour de cette droite, et l'autre a un mouvement de translation uniforme perpendiculairement à cette droite et parallèlement au plan (273-285).

4° dans un plan perpendiculaire au plan donné et passant par le point donné, une des droites ayant un mouvement de rotation autour du point, et l'autre de translation perpendiculaire, et parallèlement au

plan. La rotation se fait de manière que le sinus-verse de l'inclinaison sur la perpendiculaire au plan, menée par le point donné, suive une vitesse uniforme, et la translation se fait de manière que la ligne mobile soit la génératrice d'un cylindre de révolution autour de la perpendiculaire précitée, et cela suivant une vitesse uniforme.

G. Holzmüller. – Zur elementaren Behandlung der Potentialtheorie (Z. XXVIII. 1897. 401-428).

L'auteur considère les lignes équipotentielles (appelées lignes de niveau) produites par l'action de centres électriques situés en ligne droite. Ces lignes ont pour équation générale

$$\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \cdots + \frac{m_n}{r_n} = c,$$

et les lignes de force, trajectoires orthogonales, ont pour équation

$$m_1 \cos\theta_1 + m_2 \cos\theta_2 + \cdots + m_n \cos\theta_n = c,$$

$\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n$ étant les angles des rayons polaires avec la ligne des foyers.

Ligne de longueur nulle. – Les lignes de longueur nulle sont des lignes imaginaires tracées sur une surface et y jouant un rôle à peu près identique à celui que jouent dans le plan les droites isotropes.

Soit la surface représentée en coordonnées curvilignes λ, μ, par les équations

$$x = \varphi(\lambda, \mu), \quad y = \chi(\lambda, \mu), \quad z = \psi(\lambda, \mu).$$

Si l'on a

$$R = \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial z}{\partial \mu} = 0,$$

les coordonnées seront orthogonales et l'élément d'arc d'une courbe tracée sur la surface aura pour expression

$$ds = \sqrt{L\, d\lambda^2 + M\, d\mu^2},$$

en posant

$$L = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2,$$

$$M = \left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2.$$

Les lignes coordonnées sont donc lignes de longueur nulle quand on a à la fois

$L = 0, \qquad M = 0.$

Relativement aux lignes de longueur nulle, les lignes de courbure sont des courbes harmoniques (voir ce mot).

Voir : E. Cosserat. – Sur les surfaces rapportées à leurs lignes de longueur nulle (C. R. t. CXXV, 1897, pp. 159–162).

Voici un extrait de cette note.

Soit φ une fonction donnée de x et y pouvant être prise arbitrairement ; si z désigne une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2}\frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

les formules

$$X + iY = \varphi,$$
$$X - iY = -\int \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} dx + \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} dy,$$
$$Z = z,$$

définissent une surface rapportée à ses lignes de longueur nulle.

__Ligne de Luders.__ – Lorsque les métaux ferreux subissent une déformation permanente, à la surface apparaissent des rides qui ont été quelquefois désignées sous le nom de Lignes de Luders.

En 1894, Hartmann constata que ce phénomène se produisait avec tous les métaux et il en établit les lois.

Voir : Mesnager : Déformation des métaux (Essai d'une théorie). (C. R. 1898, t. CXXVI, pp. 515–517)

Voir aussi : C. R., 5 mars 1894, t. CXVIII, et une brochure publiée en 1896 chez Berger Levrault.

__Ligne de niveau.__ – Dans certaines études sur la théorie du potentiel, les lignes d'égal potentiel ou lignes équipotentielles, sont quelquefois appelées lignes de niveau. Il paraît préférable de leur donner un nom spécial pour éviter toute équivoque.

Voir Lignes de force.

Ligne de passage. — Ligne suivant laquelle se coupent géométriquement les feuillets d'une surface de Riemann.

Les lignes de passage sont ainsi nommées parce qu'elles sont toujours forcément traversées par un point analytique qui passe d'un feuillet dans un autre.

Toutefois, il faut bien observer que les lignes de passage n'existent qu'au point de vue géométrique.

Au point de vue analytique, les feuillets ne se coupent pas en se traversant.

Ainsi, deux points géométriquement confondus sur une ligne de passage, ne sont analytiquement confondus que s'ils sont dans un même feuillet.

Supposer le contraire serait détruire la connexion de la surface et permettrait à un point de franchir une coupure sans changer de valeur, ce qui est impossible.

Les lignes de passage sont généralement rectilignes et elles joignent alors deux points de la surface de Riemann, où la fonction qui lui est attachée éprouve une discontinuité polaire; mais on peut leur donner aussi toute autre forme.

Pour plus de détails, voir :

E. Picard. — Traité d'Analyse.

Appell et Goursat. — Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales.

Ligne de plus grande pente. — Sur une surface, l'équation différentielle des lignes de plus grande pente est

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q},$$

avec

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Ligne de rebroussement. — En géométrie de l'espace, lieu de points de rebroussement sur une surface. Par exemple, si la courbe plane

$$f(x, y) = 0$$

a un point de rebroussement (de 1re ou 2e espèce) le cylindre de même équation a une génératrice de rebroussement (de 1re ou 2e espèce).

Ligne de Ribaucour. — La dénomination de Lignes de Ribaucour a été proposée par

E. Cesàro (N. A. 1888, p. 174; Sur deux classes remarquables de lignes planes).

A la bibliographie déjà donnée, ajouter: E. Dubois (N. C. 1880, pp. 158-165 et auteurs cités);

A. Ribaucour (N. C. 1880, pp. 224-225).

A. Ribaucour (Etude des élassoïdes, Ch. XIV. §§ 122 à 128, pp. 157-164. 1881).

<u>Ligne de striction</u>. — Lieu des points centraux des génératrices d'une surface réglée.

On appelle point central d'une génératrice le point où le plan tangent est perpendiculaire au plan asymptote, c'est-à-dire au plan tangent au point à l'infini sur cette génératrice. Le point central est aussi la position limite du pied, sur la génératrice, de la perpendiculaire qui lui est commune avec la génératrice infiniment voisine.

Lorsqu'une surface réglée a deux systèmes de génératrices distinctes, elle a deux lignes de striction, une par système. Tels sont les cas de l'hyperboloïde à une nappe et du paraboloïde hyperbolique.

Pour l'hyperboloïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

les lignes de striction sont deux courbes gauches du 6e ordre, intersections de l'hyperboloïde et des deux surfaces cubiques

$$\frac{y}{b}\left[\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) + \frac{z^2}{c^2}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\right] \pm \frac{zx}{ca}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right) = 0.$$

Pour le paraboloïde hyperbolique

$$\frac{y^2}{p^2} - \frac{z^2}{q^2} = 2x,$$

les lignes de striction sont deux paraboles, intersections du paraboloïde et des deux plans

$$\frac{y}{\sqrt{p^3}} \pm \frac{z}{\sqrt{q^3}} = 0.$$

Dans une surface développable, l'arête de rebroussement est la ligne de striction.

<u>Ligne de symétrie</u>. — Pour la description et les propriétés de la ligne de symétrie, voir:

S. Mangeot: Sur un réseau conjugué particulier de certaines surfaces dérivées des surfaces de

second ordre (C. R. t. CXXV, pp. 1083–1086; 1897).

Ligne d'inflexion. — En géométrie de l'espace, lieu de points d'inflexion sur une surface. Par exemple, si la courbe plane

$$f(x, y) = 0$$

a un point d'inflexion, le cylindre de même équation a une génératrice d'inflexion.

Ligne équipotentielle. — Les lignes équipotentielles sont quelquefois appelées lignes de niveau dans certains ouvrages.

Les trajectoires orthogonales des lignes équipotentielles sont les lignes de force.

Voir lignes de force.

Ligne halysique, et Ligne isodynamique. — Une ligne isodynamique est le lieu des points dont le produit des distances aux points fixes $A_1, A_2, \ldots A_n$, soit dans un rapport constant avec le produit des distances à d'autres points fixes $B_1, B_2, \ldots B_n$.

Une ligne halysique est le lieu des points M tels que la somme des angles MA_1B_1, MA_2B_2, ... MA_nB_n, soit égale à $K\pi$.

Les lignes halysiques sont les trajectoires orthogonales des lignes isodynamiques.

La notion de ces deux familles de lignes est due à F. Lucas. Voir S. M. t. XVII, 1888-1889, pp. 17–69, Statique des polynômes.

Note. — L'idée première de ces lignes paraît devoir être attribuée à C. Duhamel, qui, dans le cours (lithographié) d'analyse de l'École Polytechnique (1862) a proposé la question suivante:

Trouver les trajectoires orthogonales des courbes telles que le produit de leurs rayons vecteurs issus des sommets d'un triangle équilatéral soit constant.

Démontrer que la somme des angles que font les rayons vecteurs des points d'une même trajectoire avec un axe fixe est constante.

Dans la solution que l'on en donnait, la condition du triangle équilatéral était remplacée par des points quelconques du plan, aucune hypothèse n'étant faite sur leur situation.

Voici en effet comment on traitait la question.

Soient MN un élément de la courbe, MN' un

élément égal de la trajectoire orthogonale, A un des points fixes, AF une direction fixe, PMP' une perpendiculaire à AM, rencontrant AN et AN' en P et P'; α, ϵ les angles MAF, MAN.

A un infiniment petit près d'ordre supérieur, les deux triangles MNP, MN'P' sont égaux, et l'on a NP = MP', ou

$$dr = r\epsilon.$$

Mais l'équation de la courbe MN est

$$r_1 r_2 r_3 r_4 \cdots r_n = K.$$

Différentiant, on a

$$r_2 r_3 r_4 \cdots dr_1 + r_1 r_3 r_4 \cdots dr_2 + r_1 r_2 r_4 \cdots dr_3 + \cdots = 0.$$

Remplaçant dr_i par $r_i \epsilon$, on a

$$(r_1 r_2 r_3 r_4 \cdots) \sum_i \epsilon = 0$$

d'où

$$\sum \epsilon = 0.$$

Mais $\sum \epsilon$ est la différentielle de $\sum \alpha$, donc

$$\sum \alpha = C^{te}$$

<u>Ligne isolée</u>. — En géométrie de l'espace, ligne non située sur une surface, bien que les coordonnées de ses points satisfassent à l'équation de cette surface. Par exemple, si la courbe plane

$$f(x, y) = 0$$

a un point isolé, le cylindre de même équation a une génératrice isolée.

<u>Ligne isoplèthe</u>. — (De ἴσος, égal; πλῆθος, quantité). Ligne le long de laquelle un certain élément considéré, d'ailleurs quelconque, conserve la même valeur. Ce terme est donc pris dans le sens de ligne d'égal élément. Les lignes isanomales, isoclines, isobares, ... en sont des cas particuliers.

Le terme, proposé par Vogler et adopté par Léon Lalanne, a été introduit par M. d'Ocagne dans sa Nomographie (p. 9).

<u>Ligne isoptique</u>, et <u>Ligne orthoptique</u>. — Le problème des lignes isoptiques et notamment celui des lignes orthoptiques (plus simple que le premier) seraient intéressants à traiter pour la plupart des courbes géométriques.

Voici d'ailleurs à ce sujet quelques remarques.

Pour abréger, nous désignerons ces lignes respectivement par V et T, ces deux lettres figurant un angle quelconque et un angle droit.

I. Logarithmique (ou exponentielle).
T. La courbe donnée étant composée d'une branche hyperbolique et d'une branche parabolique s'éloignant dans une direction perpendiculaire à l'asymptote rectiligne, on voit qu'il ne peut y avoir de ligne orthoptique.
V. La ligne isoptique suppose l'angle obtus (ou supplémentaire à l'angle aigu.
II. Cycloïde.
V.T. Ces deux lignes sont des cycloïdes, accourcies ou allongées (Mém. de l'Ac. des Sc. p. 1704; La Hire).
Voir aussi : Aperçu historique etc. p. 125. M. Chasles. et I. M. 1895, p. 278 (A. Mannheim).
III. Épicycloïde (ou Hypocycloïde).
V. T. Ces deux lignes sont aussi des épicycloïdes, allongées ou accourcies (Aperçu historique, éd. 1875, p. 125. M. Chasles).
Le lieu complet comprend plusieurs épicycloïdes, dont le nombre n'est fini que si le rayon du cercle de base est commensurable avec celui du cercle roulant. Dans ce cas, l'épicycloïde et l'isoptique sont toutes deux algébriques.
Voir I. M. 1896, 291-292 E. Duporcq; 1897, 272-273, Audibert.
IV. Astroïde.
V. L'Astroïde étant une hypocycloïde, V est aussi une hypocycloïde.
T. Cette ligne a pour équation

$$2(x^2+y^2)^3 = a^2(y^2-x^2)^2.$$

I. M. 1896, 198. E.-N. Barisien; 1897, 272-273, Audibert.
V. Cardioïde.
V. La cardioïde étant une épicycloïde, V est aussi une épicycloïde.
T. Cette ligne se compose d'un cercle et d'un limaçon de Pascal (variété d'épicycloïde).
I. M. 1896, p. 198. E.-N. Barisien; 291-292, E. Duporcq; 1897, 272-273, Audibert.
Voir aussi N. C. 1877, 58-63 H. Brocard, H. Schoentjes, Lambiotte; 123-125, J. Neuberg; 231-233, H. Brocard.
VI. Limaçon de Pascal.
V.T. Le limaçon de Pascal étant une épicycloïde, les courbes V et T sont aussi des épicycloïdes.
VII. Tractrice.
T. La courbe T se compose de deux piriformes

égales, ayant leurs rebroussements en O sur Oy, et doublement tangentes intérieurement à la tractrice.

VIII. Chaînette.

T. Courbe conchoïdale, asymptote à la parallèle à Ox, tangente à la chaînette au sommet.

IX. Spirale logarithmique.

V et T. D'autres spirales logarithmiques.

X. Ellipse ou hyperbole (ou Conique à centre)

T. Un cercle concentrique (Voir Cercle de Monge).

V. Pour la ligne isoptique, voir l'article: Courbe isoptique et la bibliographie mentionnée.

XI. Système de deux ellipses homofocales.

T. Les deux côtés de l'angle droit étant formés par deux tangentes à l'une et à l'autre ellipses, la courbe T est un cercle (Voir Conique homofocale).

XII. Système de deux exponentielles symétriques par rapport à Oy.

T. T est une tractrice (Voir Tractrice)

XIII. Parabole.

T. T est la directrice.

XIV. – Deux cercles.

V et T sont des limaçons de Pascal.

XV. – Une courbe et un point (intérieur ou extérieur à la courbe).

T est la podaire de la courbe par rapport à ce point.

V est la podaire oblique

Note. Dans le cas où la courbe donnée est un cercle, de centre B, et le point donné A extérieur au cercle, la courbe T est la podaire du cercle appelée aussi limaçon de Pascal, avec boucle partant du point A.

Le cercle ADB décrit sur AB comme diamètre est alors le lieu des centres des cercles doublement tangents au limaçon. Cette propriété résulte très simplement du fait que le limaçon est la courbe isoptique de deux cercles et qu'il est doublement tangent à ces deux cercles.

Voir N. A. quest. 997. H. Brocard, 1870; sol. 1872, p. 508.

XVI. Cercle.

V et T sont, évidemment, deux cercles concentriques.

XVII. Hypocycloïde triangulaire.
V. une autre hypocycloïde.
T. Le cercle tritangent intérieurement.
I. M. 1896, 291-292. E. Duporcq.
XVIII. Spirale sinusoïde.
La ligne isoptique est une courbe de même famille.

Généralement, l'angle des tangentes menées aux extrémités de deux rayons vecteurs de ces courbes, est égal à $(m+1)$ fois celui de ces rayons, m désignant l'ordre de la spirale sinusoïde ou de son équation

$$r^m = a^m \sin m\theta.$$

Cette propriété (énoncée par E. Lucas et Barbier) permet donc de résoudre le problème suivant:
Trouver le lieu du sommet d'un angle constant, dont les côtés sont tangents à une spirale sinusoïde.
Dans le cas où cet angle est droit, l'angle des rayons vecteurs des points de contact est $\frac{\pi}{2m+2}$. Il est facile de vérifier cette expression sur les courbes de cette famille: cercle, cardioïde, parabole, hyperbole équilatère, lemniscate, etc.
Voir N. C. 1877, p. 233. H. Brocard; N. A. 1876, pp. 97-108. Haton de la Goupillière.
Voir aussi l'article: Spirale sinusoïde.
XIX. Deux segments de droite.
Pour la bibliographie de ce cas particulier, voir Courbe isoptique.
Notes. - I. - A, B étant les points de contact des tangentes MA, MB à la courbe (C) ou à des courbes (C_1) (C_2), et formant un angle constant AMB, la tangente en M à la ligne isoptique (M) est aussi la tangente au cercle circonscrit au triangle AMB.
N. A. 1846, pp. 127 et 147.
II. - Dans la bibliographie des lignes orthoptiques, il convient de mentionner le problème suivant, traité par Clairaut dans les Mém. de l'Ac. des Sc. pour 1734:

Trouver les courbes MON autour desquelles, faisant glisser l'équerre MCN, le sommet C de cette équerre soit toujours dans la courbe donnée.

Ligne topographique. -
Comme référence bibliographique, on peut citer: Breton de Champ: Mémoire sur les lignes de

faîte et de thalweg que l'on est conduit à considérer en topographie (J. M., (2) III, 1877, pp. 99-114).

Limaçon de Pascal. — L'équation polaire étant

$$r = a\cos\theta \pm b,$$

la courbe complète a pour aire $\frac{\pi(a^2+2b^2)}{2}$; l'aire de la boucle seule a pour expression

$$\frac{a^2+2b^2}{2} \text{arc cos} \frac{b}{a} - \frac{3b}{2}\sqrt{a^2-b^2}.$$

Le limaçon de Pascal peut être considéré comme la courbe inverse d'une conique à centre par rapport à un foyer. On en déduira ses caractéristiques pluckériennes, qui sont aussi les caractéristiques de sa réciproque et de la développée d'une cubique circulaire de la troisième classe ou de la développée d'une cissoïde oblique (V. Retali).

Le limaçon de Pascal peut se définir de la façon la plus variée par suite de la facilité qu'il offre de se classer dans plusieurs catégories de courbes ou familles bien caractérisées, telles que conchoïdes, épicycloïdes ou hypocycloïdes, podaires, caustiques, courbes mécaniques, courbe isoptique ou orthoptique, etc. Sans parler d'une multitude de propriétés qui le font intervenir dans les applications de la Géométrie analytique. Aussi la bibliographie de cette courbe exigerait-elle aujourd'hui beaucoup d'étendue.

Une mention particulière doit être faite de la remarquable relation du limaçon de Pascal avec une courbe transcendante :

Les points de contact des tangentes menées à une développante de cercle par un point quelconque de son plan appartiennent à un limaçon de Pascal (J. S. 1888, p. 261. G. Fouret).

Lituus. — Voir Trombe et Spirale polaire.

Logarithmique. — La logarithmique a été considérée pour la première fois par Gregory dans la préface de son ouvrage, publié en 1668 : Geometriae pars universalis, puis elle fut étudiée sous les noms de logarithmica et de Logistica par Huygens (De causa gravitatis, 1690) comme application de ses recherches sur

la pesanteur de l'air (A. Aubry).

Poncelet a montré que la logarithmique est la courbe méridienne d'une tour ronde dont la pression verticale dans une section horizontale quelconque est constante.

Même remarque pour le profil d'une sonde suspendue verticalement.

Dans les deux cas, l'axe de révolution est l'asymptote de la logarithmique.

Note. – Lorsque l'équation d'une courbe transcendante, explicite en y, renfermera des termes exprimés en logarithmes de l'abscisse, on pourra simplifier la discussion de l'équation en prenant pour unité le nombre e, base des logarithmes népériens, et s'arrangeant de façon à remplacer partout les logarithmes par des nombres entiers, correspondant à des puissances de e. Si d'autre part la courbe dépend d'un seul paramètre, on pourra également avoir avantage à prendre pour valeur de ce paramètre une puissance donnée de e.

Logistique. – Nom rarement employé pour désigner la logarithmique, et rappelant une dénomination donnée primitivement à cette courbe.

Voir Logarithmique.

Loxodromie. – La loxodromie a été étudiée à l'origine sous le nom de rumbus (De arte navigandi. Pedro Nunez. Coïmbre. 1550).

Son nom de Loxodromie lui a été donné par Snellius (Tiphys batavus. Leyde. 1624).

Moulure. – Les moulures sont des surfaces courbes, mais dans le langage courant on les confond volontiers avec leurs profils, comme on le fait déjà pour cercle et circonférence.

Les courbes ainsi dénommées sont généralement des arcs de cercle ou des combinaisons d'arcs de cercle, à la façon des courbes de raccordement.

Leur énumération, accompagnée de figures, devra suffire à la classification de ces courbes employées dans l'art des constructions et dans le dessin d'ornement.

Les moulures, considérées comme profils, peuvent être définies des combinaisons d'arcs de cercle reliées à deux droites parallèles.

Il y a lieu de distinguer les variétés suivantes :

Moulures à recoupement :

Baguette ou Tore — Suivant le diamètre plus ou moins grand du demi-cercle qui forme les moulures ainsi désignées

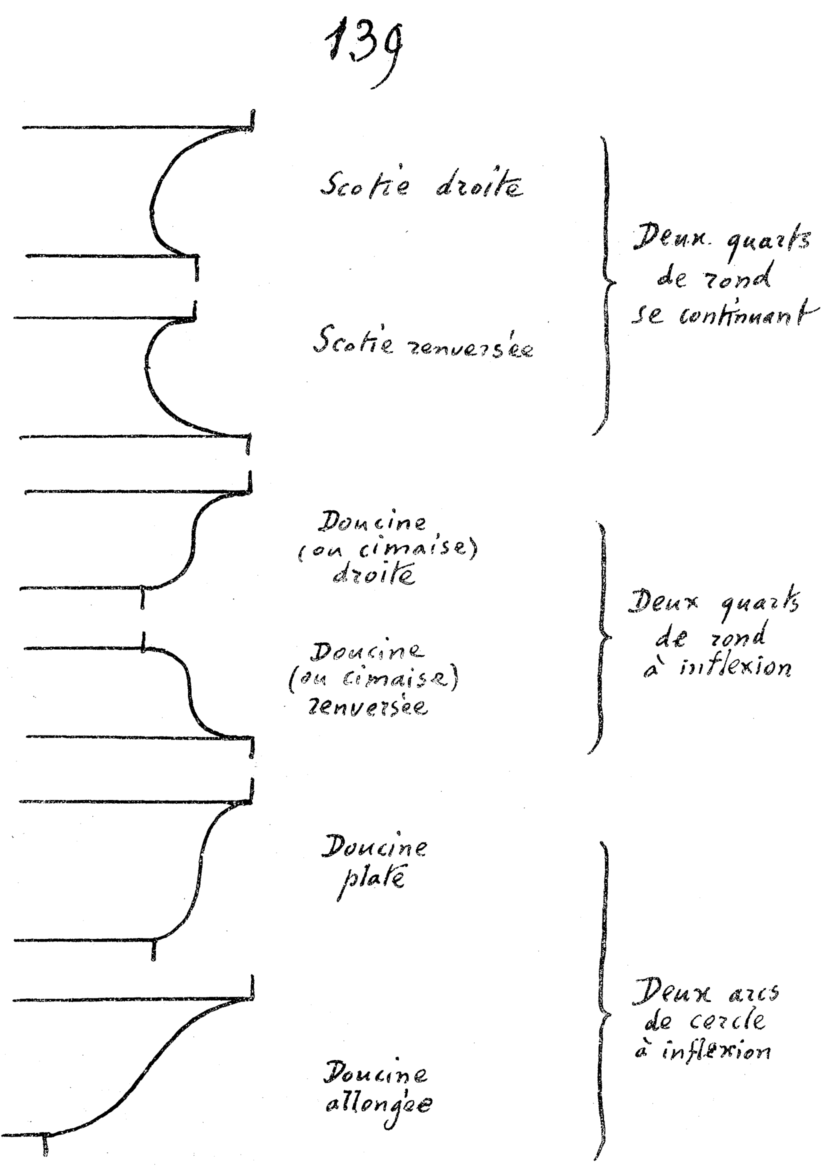
Talon droit
Talon renversé — Deux quarts de rond à inflexion

Moulures à raccordement partiel

Quart de rond droit
Quart de rond renversé
Congé (ou cavet) droit
Congé (ou cavet) renversé — Emploi du quart de rond

Moulures à raccordement complet

Gorge
Gorge creuse — Demi-cercle



En réalité, la moulure appelée doucine plate est à recoupement oblique, ce qui revient à dire que le raccordement géométrique est incomplet par l'emploi d'arcs de cercle, mais dans la pratique on obtient le raccordement en arrondissant les angles.

Note.- La scotie, en particulier, peut se tracer comme variété d'anse de panier à plusieurs centres (courbe de raccordement par arcs de cercle, de rayons différents). Quelquefois aussi, on emploie pour la scotie un arc d'ellipse obtenu par rabatte-

ment de l'ordonnée d'une demi-circonférence.
Voir Scotie.

Voir aussi, pour les diverses moulures, à leurs dénominations particulières.

Ombilic. — On a donné aux ombilics du plan la dénomination de points cycliques.

En particulier, on appelle ombilics d'une quadrique les extrémités (réelles ou imaginaires) des diamètres conjugués des plans cycliques, c'est-à-dire des plans qui déterminent dans la surface des sections circulaires.

Toute quadrique à centre a quatre ombilics (réels ou imaginaires).

Onde trochoïdale. — Courbe représentant le mouvement des vagues de la houle.
Voir les Traités d'hydrodynamique.

Orbe. — Ancien nom donné à l'orbite des planètes.

Voir, par exemple : Cassini : Sur les différents degrés de vitesse avec laquelle chacune des planètes se meut sur son orbe (Mém. de l'Ac. des Sc. pr 1736, pp. 233-243).

Ovale de Descartes. — Voici, au sujet des ovales de Descartes, quelques références bibliographiques à ajouter à la liste, déjà étendue, qui a été donnée dans un premier article.

1° Hist. de l'Ac. royale des Sc. pr 1758, t. I. pp. 120-121.

Sur une nouvelle manière de décrire les ovales de Descartes.

On sait, il y a longtemps, que des rayons parallèles qui tombent sur une lentille de verre, dont la surface est une portion de sphère, ne se réunissent point au même point de l'axe ; cet obstacle à la perfection des lunettes, occupa longtemps Descartes, et lui fit imaginer ces verres hyperboliques et elliptiques, qu'il se donna tant de peine pour faire exécuter. Ses réflexions à ce sujet le menèrent à des considérations plus générales sur les courbes de réfraction, et lui firent imaginer ces ovales devenues si célèbres, sous son nom : on sait que la propriété essentielle de la première de ces courbes est que le sinus de l'angle formé par l'intersection d'une ligne partant d'un point pris sur l'axe prolongé, la perpendiculaire à l'ellipse dans le point où cette ligne la coupe, doit être au sinus de l'angle formé par cette même ligne et celle qui va au foyer, toujours dans une raison constante,

exprimée par celle du sinus d'incidence au sinus de réfraction, dans la substance dont est formée la lentille.

Descartes a donné une manière de décrire cette ovale par un mouvement continu ; ici, M. D'Arcy en donne une autre pour décrire toutes celles de cette espèce par un mouvement semblable ; cette manière ouvrira peut-être une nouvelle route pour décrire d'autres courbes, car on n'avait point encore pensé au moyen qu'il a imaginé.

Note. – Le tracé inventé par le chevalier d'Arcy a été exposé dans l'édition in-4° des Mémoires de mathématiques, et supprimé dans l'édition in-12.

II. – Remarques de Chasles (Aperçu historique, 2e édon Note XXI et pp. 111 et 161.

Ovales de Descartes. – Géométrie de Descartes, liv. 2e. – Ces courbes, imaginées par Descartes, ont joué un grand rôle, surtout dans sa Dioptrique. Nous n'en parlerons que dans notre 4e Époque où nous les retrouverons reproduites dans le 1er livre des Principes de Newton.

Nous citerons encore, du Livre des Principes, les fameuses ovales imaginées par Descartes pour réunir en un seul point par la réfraction les rayons de lumière émanés d'un autre point comme font l'ellipse et l'hyperbole à l'égard des rayons de lumière parallèles entre eux (1). Newton fait voir d'une manière très simple que ces courbes sont le lieu d'un point dont les distances à deux circonférences de cercle sont entre elles dans un rapport constant. C'est aussi ce qu'avait montré la construction géométrique de ces courbes donnée par Descartes et ce que Huygens avait conclu immédiatement et sans démonstration de son système ondulatoire dans son Traité de la Lumière.

Descartes ne les a pas étudiées complètement et de remarquables propriétés de ces courbes lui ont échappé. J. Herschel les a appelées lignes aplanétiques (sans aberration) à cause de leur usage en Optique. M. Quetelet leur a découvert de singulières et curieuses propriétés.

III. – À l'occasion du même problème d'optique,

---

(1) Cette propriété des coniques, qui repose sur la relation entre le foyer et la directrice, est due aussi à Descartes qui l'a démontrée dans sa Dioptrique.

plusieurs mathématiciens, non renseignés sur les solutions qui en avaient été données depuis longtemps, se sont proposé de le résoudre et ont ainsi retrouvé les ovales de Descartes.

Voir, par exemple :

Curie (Note sur la forme à adopter pour une lentille, afin qu'elle fasse converger rigoureusement en un point donné les rayons lumineux issus d'un autre point également donné) (Cette recherche remonte à 1851, mais elle a été publiée seulement en 1876 dans le t. XXV (2) du Mémorial de l'Officier du Génie, pp. 290-328, 17 fig.) (Voir : B. D. 1879 . 2e Pie pp. 75-76).

L.-L. Vallée (Mémoire sur la vision, 1854) (Voir Optoïde).

IV. – Pour la Description mécanique des Ovales de Descartes, voir :

A. Cayley. – Quarterly J. of Math. t. XIII, pp. 321-330, 1875.

Hammond. – American J. of Math. pure and applied. t. I. p. 283 ; 1878.

V. – Parmi des travaux plus récents, ayant trait à l'étude des ovales de Descartes, il convient de signaler une note : Sur les coordonnées bipolaires, par J. de Vries, parue au t. IV (1895-1896, pp. 219-224) des Verslag der Zittingen etc. (Bulletins des Séances de l'Acad. royale des Sc. d'Amsterdam).

P, Q, R étant trois foyers en ligne droite, et p, q, r les distances à un point M, l'ovale de Descartes $\alpha p + \beta q = \gamma f$ aux deux foyers P, Q est représenté en même temps par une des équations $\gamma p - \beta r = \alpha g$, $\gamma q + \alpha r = \beta h$, avec $f = PQ$, $g = PR$, $h = QR$, si le troisième foyer R (théorème de Chasles) est déterminé par la condition $\alpha^2 g + \beta^2 h = \gamma^2 f$, et à l'aide de ces trois équations, on trouve encore l'équation tripolaire $\alpha g q - \beta h p + \gamma f r = 0$.

La même analyse permet d'établir que deux cartésiennes confocales se coupent à angle droit. Ainsi le système

$$\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} = \frac{\gamma}{f}$$

de courbes méridiennes des niveaux potentiels de deux quantités de matière α, β dans les pôles P, Q a pour trajectoires orthogonales le système

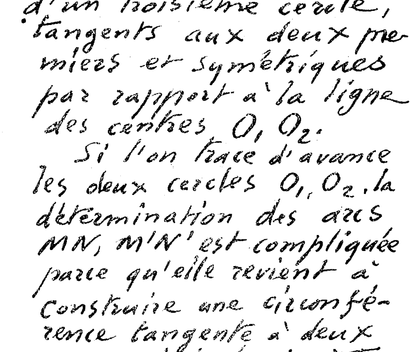
$$\alpha \cos \theta_1 + \beta \cos \theta_2 = \delta$$

de lignes de force, θ_1 et θ_2 désignant les angles des rayons vecteurs p, q avec la droite PQ.

Voir B. D. 1898, 2e p^{ie} p. 96.

VI. — L'étude des ovales de Descartes a été très développée par Chasles (Aperçu historique), Quetelet (Nouveaux Mémoires de Bruxelles), A. Cayley (Journal de Liouville, t. XV); G. Salmon, qui dans son ouvrage (Courbes planes) a résumé les plus saillantes propriétés de ces courbes remarquables.

Ove. — Courbe en œuf ou courbe ovoïde, employée dans le dessin d'architecture et d'ornement. C'est une courbe de raccordement formée de deux arcs de cercle donnés O_1, O_2 et de deux arcs MN, $M'N'$ d'un troisième cercle, tangents aux deux premiers et symétriques par rapport à la ligne des centres $O_1 O_2$.



Si l'on trace d'avance les deux cercles O_1, O_2, la détermination des arcs MN, $M'N'$ est compliquée parce qu'elle revient à construire une circonférence tangente à deux cercles O_1, O_2 et passant par un point donné M ou N de l'un de ces cercles.

Au contraire, en se donnant d'abord l'arc MN, de centre C, on construira aisément deux petits cercles O_1, O_2 tangents en M, N, puis on prendra le symétrique C' du point C par rapport à $O_1 O_2$, et on tracera l'arc de cercle $M'N'$ avec C' pour centre et $CM = CN$ pour rayon.

Voici une autre construction très simple qui donne un gracieux ovale :

Décrire un cercle ADB, de centre E et de rayon AE ; des points A, B, diamétralement opposés, pris pour centres, décrire deux arcs de cercle AF, BG, avec AB pour rayon ; les arrêter à leurs intersections avec les rayons ADG, BDF inclinés à 45° sur AEB, puis du point D comme centre, avec DF ou DG pour rayon, décrire un quart de cercle FG.

Ovhélite. — Courbe d'origine mécanique, lieu d'un point qui gravite autour d'un centre suivant la loi de Newton, pendant que ce centre décrit une droite d'un mouvement uniforme. Par exemple, l'orbite réelle de la Terre (ou de toute autre planète) dans l'espace est à peu près une ovhélite, car, elle décrit une ellipse autour du centre de gravité du système solaire comme foyer, et ce centre peut être considéré comme animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

Une indication sur cette courbe a été donnée dans le Recueil d'exercices sur la Mécanique rationnelle (A. de St Germain, 2e édon p. 407) à l'occasion de la détermination des conditions initiales permettant à trois points matériels A, B, C, s'attirant suivant la loi de Newton, de prendre un mouvement tel qu'ils puissent rester constamment sur une même droite. Il faut, pour cela, qu'ils soient d'abord en ligne droite au début et qu'alors leurs vitesses initiales V_1, V_2, V_3 soient parallèles et proportionnelles aux segments OA, OB, OC, O étant le centre de gravité des trois points. Ceux-ci décrivent des ellipses homothétiques de foyer O suivant la loi des aires et leurs trajectoires absolues sont « des sortes d'hélices tracées sur des cylindres à base du second degré, courbes que M. Léopold Hugo a proposé de nommer ovhélites. »

Ceci suppose évidemment un mouvement préliminaire de O.

Si le foyer O n'avait pas de vitesse initiale, tout se passerait dans le plan qui contient la droite AOBC et les vitesses v_1, v_2, v_3.

On voit que l'ovhélite peut être une courbe plane. Son tracé rappelle alors la forme de la cycloïde allongée ou accourcie.

Note. — Une communication de M. Léopold Hugo, sur les ovhélites planétaires, a été simplement annoncée dans le Bulletin de la Société mathématique de France, t. III, p. 183; 1874-1875.

Paraboles de divers degrés. — Sous le nom de paraboles de divers degrés, ou d'ordre supérieur,

on désigne les courbes représentées en coordonnées rectilignes par une équation de la forme

$$y^m = px^n,$$

où m et n sont des exposants positifs.

L'aire OMD d'une de ces courbes a pour expression

$$\frac{m}{m+n} \text{ rectangle } ODMB;$$

autrement dit,

$$\frac{\text{aire } OMD}{\text{aire } OMB} = \frac{m}{n}.$$

Dans la parabole ordinaire

$$y^2 = ax,$$

on a $m=2$, $n=1$. On en conclut

$$\text{aire } OMB = \frac{2}{3} \text{ rectangle } ODMB$$

ou

$$\text{aire } OMB = \frac{2}{3} OD.MD,$$

ainsi que l'avait démontré Archimède.

Note. – La même propriété subsiste dans le cas où n supposé $< m$ prend des valeurs négatives. Seulement les paraboles deviennent alors des hyperboles d'ordre supérieur.

Parabole divergente. – Cubique dont les branches infinies tendent à devenir parallèles à Oy au lieu d'être parallèles à Ox comme dans la parabole ordinaire du second degré.

Parabole divergente
$ay^2 = (x^2 - b^2)(x - c)$

Parabole ordinaire
$y^2 = 2ax$

Les figures ci-jointes montrent les types comparatifs de ces deux courbes.

Voir aussi G. Salmon, Courbes planes, pp. 236-238 et 248.

Parabole hélicoïdique. – (Parabola helicoides). – Cette courbe a été étudiée par Jacques Bernoulli dans la note : Specimen calculi differentialis in dimensione parabolae helicoidis (Acta Eruditorum. 1691. p. 13-23). On reconnait que la courbe est une spirale parabolique, c'est-

-à-dire la spirale ayant pour équation polaire

$r^2 = a^2\theta$.

Voir Spirale parabolique.

Parabole osculatrice. — Pour la bibliographie des paraboles et des coniques osculatrices, voir : G. Salmon. Courbes planes, pp. 511-516.

B. Amiot. — Mémoire sur les développées elliptiques des courbes planes (C. R. t. XXI. pp. 348-352, 1845) (retrait du Mémoire annoncé p. 1443).

L'auteur se propose de déterminer le lieu des foyers des coniques osculatrices du 2e ordre à une trajectoire plane quelconque. Il dit, p. 351 : le lieu des foyers des paraboles osculatrices du 2e ordre en un même point M d'une courbe plane est, comme on sait, un cercle tangent à la trajectoire et ayant pour rayon le quart du rayon de courbure correspondant.

Ampère. — Sur les avantages qu'on peut retirer, dans la théorie des courbes, de la considération des paraboles osculatrices, avec des réflexions sur les fonctions différentielles dont la valeur ne change pas lors de la transformation des axes (Journal de l'École Polytechnique, XIVe cahier).

A. Enneper. Sur les coniques osculatrices des courbes planes (Z. S. t. XIX. 1874).

Parabole semi-cubique. — Cette courbe est identique à la courbe isochrone. Voir ce mot.

Elle est aussi la développée de la parabole ordinaire.

La dénomination de semi-cubique tient à la façon d'écrire son équation en admettant un exposant fractionnaire : $y^3 = px^2$ revient en effet à

$$y = ax^{\frac{2}{3}}.$$

Parabole solide. — D'après Ozanam (Dict. math. ou idée générale des mathématiques ; Amsterdam, 1691, p. 101-102) cette courbe a pour équation

$$x^3 = ay^2;$$

elle est donc une parabole semi-cubique.

Ozanam mentionne aussi une seconde parabole solide dont l'équation est

$$a^2y = x^3$$

c'est-à-dire que cette courbe est identique à la parabole cubique.

La dénomination de parabole solide a,

Paradoxos de Menelaos. — Sous ce nom, d'après le seul témoignage de Pappus, le géomètre grec Menelaos a étudié une courbe dont la véritable nature n'a pas été précisée, mais qui parait coïncider avec la voûte carrable de Viviani (Voir: P. Tannery, Pour l'histoire des lignes et surfaces courbes dans l'antiquité; B. D. 1883, 1re Pie pp. 278-291.

Perle. — Voir aussi Ellipses de divers degrés, et Œuvres de Chr. Huygens, t. II.

Pippienne. — Dénomination donnée par Cayley (A memoir on curves of the third order. Phil. Trans. t. CXLVII, p. 415) à la courbe appelée plus tard, d'après Cremona, Cayleyenne de la cubique.

Voir G. Salmon, Courbes planes, pp. 214-216.

Piriforme. — Il est aisé d'imaginer des transformations du cercle ou d'une courbe fermée, donnant naissance à des piriformes symétriques ou non symétriques, mais ces courbes peuvent être de degré supérieur à 4.

La plus simple des courbes piriformes parait être celle qui a pour équation

$$y^2 = x^3 - x^4$$

ou

$$y^2 = \frac{2ax^3 - x^4}{4a^2},$$

et qui a pour aire $\frac{\pi a^2}{2}$ (Ossian Bonnet).

La piriforme

$$b^2y^2 = ax^3 - x^4$$

a pour aire $\frac{\pi a^3}{8b}$ (E.-N. Barisien).

On peut obtenir aussi une piriforme en ajoutant les rayons vecteurs d'un cercle et d'une lemniscate:

$$r = a\cos\theta \pm a\sqrt{\cos 2\theta}.$$

Cette courbe ressemble à celle qui a reçu le nom de toupie (Cours de Problèmes, t. I. 1898, pp. 137 et 177, G. de Longchamps).

Son aire est égale à $\frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}$ (E.-N. Barisien).

Podaire. — L'équation de la podaire d'un point P(α, β) par rapport à une courbe donnée (C) est immédiatement connue, dès que l'on a déterminé l'équation tangentielle $f(U, V, R) = 0$ de cette courbe.

En effet, en posant

$$X^2 + 2XY\cos\theta + Y^2 = \varphi(X, Y),$$

un point (X, Y) de la podaire se trouve sur la droite

$$\frac{X-x}{x-\alpha} = \frac{Y-y}{y-\beta}$$

et sur la perpendiculaire à cette droite menée par $(x.y)$:

$$\varphi'_{x-\alpha}(X-\alpha) + \varphi'_{y-\beta}(Y-\beta) = 0$$

ou

$$\varphi'_{x-\alpha} X + \varphi'_{y-\beta} Y - (\alpha \varphi'_{x-\alpha} + \beta \varphi'_{y-\beta}) = 0.$$

Cette droite devant être tangente à la courbe, l'équation cherchée de la podaire est

$$f[\varphi'_{X-\alpha},\ \varphi'_{Y-\beta},\ -(\alpha\varphi'_{X-\alpha} + \beta\varphi'_{Y-\beta})] = 0.$$

On appelle antipodaire d'un point P par rapport à une courbe donnée (C) (ou encore podaire inverse, ou podaire négative) la courbe (C') dont (C) est la podaire par rapport à P.

La recherche de l'antipodaire (C') revient à celle de l'enveloppe des perpendiculaires à l'extrémité des rayons vecteurs menés de P à (C). En d'autres termes, en supposant les coordonnées rectangulaires, on transporte l'origine au point P ; $f(X, Y, T) = 0$ étant alors l'équation de la courbe (C) et $(x.y.t)$ un point de cette courbe, la perpendiculaire au rayon vecteur en ce point a pour équation

$$x(X-x) + y(Y-y) = 0.$$

On cherche l'enveloppe de cette droite, les paramètres $(x.y)$ étant liés par la relation

$$f(x.y.t) = 0.$$

D'après la théorie des enveloppes, il faut éliminer x, y entre les équations

$$\frac{X-2x}{f'_x} = \frac{Y-2y}{f'_y} = -\frac{x^2+y^2}{f'_t}$$

et

$$f(x.y.t) = 0.$$

L'éliminant est l'équation de l'antipodaire de l'origine, et il ne reste qu'à revenir à l'origine primitive.

L'étude géométrique des podaires et antipodaires est aujourd'hui assez développée. Aux indications déjà données dans un premier article il convient d'ajouter les suivantes :

I. Une courbe peut avoir pour podaire une courbe de même nature, ou de même famille.

Exemples :

1° La podaire du cercle par rapport à son centre est le cercle lui-même.

2° La podaire d'une conique par rapport à un foyer est un cercle (ou une droite si la

conique est une parabole).

3° La podaire d'une spirale logarithmique par rapport à son pôle est la même spirale tournée d'un certain angle.

Ainsi la spirale logarithmique est sa propre podaire ou son autopodaire. C'est même la seule courbe qui jouisse de cette propriété (Journal de Liouville, (2) XI. 329. Haton de la Goupillière).

4° La podaire d'une spirale sinusoïde d'indice (ou d'ordre) n

$$r^n = A \sin n\theta$$

est une ligne du même groupe, de l'ordre $\frac{n}{1+n}$. L'antipodaire est donc aussi du même groupe, mais de l'ordre $\frac{n}{1-n}$.

Par exemple, l'antipodaire de l'hyperbole équilatère ($n = -2$) par rapport à son centre a pour équation polaire

$$r^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \sin \frac{2}{3}\theta.$$

On l'obtient ainsi très simplement, tandis que sa recherche par les coordonnées cartésiennes est très compliquée.

Voir N. A. 1876. pp. 97–108. Haton de la Goupillière.

II.– Les podaires successives d'une courbe tendent à devenir des spirales logarithmiques. (Théorème de J. Bertrand).

Cette propriété est à rapprocher de celle qui se rapporte aux développantes successives d'un arc de courbe dans certaines conditions (Voir Cycloïde; théorème de Jean Bernoulli).

III.– Pour une étude très détaillée des formules donnant l'aire, le rayon de courbure et la rectification des podaires successives d'une courbe, sans avoir besoin de connaître les équations de ces podaires, voir :

E.-N. Barisien.– Sur les podaires successives d'une courbe. (N. A. 1895, pp. 89–94, 157–164, 207–213, 233–244, 463–471).

E.-N. Barisien.– Sur le centre de courbure des podaires (Ibid. 471–473).

Relativement à cette dernière question, voir aussi:

Cl. Servais : Sur la courbure de la podaire et de la polaire réciproque d'une courbe donnée (M. 1891, pp. 84–88; et p. 110 (d'Ocagne)).

M. d'Ocagne : Sur le centre de courbure des

podaires (N. A. 1895, pp. 111-112).

Constructions du centre de courbure d'une podaire (Ibid, 190-192).

IV. Toute parabole est une podaire de développée de parabole (Ed. Lucas. — J. S. 1882, quest. 29).

La podaire de la développée d'une parabole par rapport à son foyer F est une parabole homothétique (rapport $\frac{1}{4}$) qui a son sommet au foyer F de la première (J. S. 1896, pp. 165-168).

V. La podaire centrale de l'ellipse a pour aire

$$\frac{\pi}{2}(a^2+b^2).$$

(N. A. 1859, p. 357; 1864, pp. 129-131; 1895, pp. 163-164).

La podaire de l'ellipse par rapport à un point quelconque peut se définir à la façon des conchoïdales. Voir : Jerabek : Sur la podaire de l'ellipse; (M. 1896, pp. 15-17).

VI. Pour la relation entre les aires des podaires d'une courbe et de la développée de la courbe proposée, voir J. M. 1895, 105, 344, 404 et J. M. 1895, pp. 443-465 (E. Duporcq).

L'aire comprise entre les podaires respectives, par rapport à un même point du plan, d'une courbe fermée quelconque et de sa développée, est indépendante du choix de ce point et égale à l'aire de la courbe proposée (J. M. 1895, p. 344).

L'aire comprise entre les deux courbes fermées parallèles n'est pas altérée par leur transformation podaire, quel que soit le point du plan pris pour pôle. (Les deux transformées ne sont pas parallèles; elles sont conchoïdes l'une de l'autre par rapport au pôle). (J. M. 1895, p. 345)

VII. Passage de l'équation différentielle de l'enveloppe d'une droite à l'équation de la podaire de l'enveloppe de cette droite par rapport à l'origine.

L'enveloppe, la courbe roulant, a pour équation différentielle

$$y = f(p).$$

La podaire de l'enveloppe, la courbe glissant, a pour équation

$$p = -\frac{x}{y}.$$

L'ordonnée y reste la même. Donc

$$y = f\left(-\frac{x}{y}\right)$$

est l'équation de la podaire de l'enveloppe de la

droite entraînée.

Exemples.– I: Axe de la parabole :

$$y = \frac{a}{p\sqrt{1+p^2}}.$$

Podaire:

$$r = a \tan \theta \qquad \text{(Cappa)}$$

II.– Axe focal d'une ellipse :

$$y = \frac{b^2}{\sqrt{1+p^2}\sqrt{b^2+a^2p^2}}.$$

Podaire:

$$(x^2+y^2)(a^2x^2+b^2y^2) = b^4y^2.$$

III.– Diamètre d'un cercle:

$$y = \frac{a}{1+p^2} \qquad \text{(Cycloïde)}$$

Podaire:

$$x^2+y^2 = ay \qquad \text{(circonférence)}$$

<u>Podoïde</u>.– Comme suite à la définition géométrique des podoïdes, on peut remarquer l'assimilation du problème des podoïdes, et aussi des podaires, à une question d'optique.

La podoïde est le lieu des images d'un point donné sur un miroir tournant, le miroir étant supposé rectiligne et formé par la tangente mobile sur la courbe donnée.

<u>Point</u>.– A la nomenclature des points remarquables, on peut ajouter :

Antipoint. Rebroussement Kératoïde. Rebroussement ramphoïde. Rebroussement nodal. Spinode. Tangentiel. Point corésiduel. Point osculnodal. Noeud d'osculation. Point d'ondulation. Point tacnodal. Point nodocuspidal. Point flecnodal. Point biflecnodal. Points de Steiner. Points opposés de Steiner. Centre des céviennes égales. Centre d'aspect. Point corrélatif d'une droite. Point corrélatif d'un plan.

La liste complète serait impossible à dresser, car tous les jours on peut rencontrer de nouvelles dénominations proposées dans les publications mathématiques pour des points qui avaient déjà reçu des noms particuliers.

Note.– La dénomination d'ombilics du plan, proposée par E. Laguerre, a été indiquée par ce géomètre dans une communication à l'Académie des Sciences de Paris: Théorèmes généraux sur les courbes planes algébriques (C.R. 9 janvier 1865).

<u>Polaires de divers ordres</u>.– Etant donnés une courbe C^m de degré m et un point fixe O de son

plan, si nous faisons tourner autour de O une transversale qui coupe C^m aux points $A_1, A_2, \dots A_m$, le lieu des centres harmoniques de degré r du système $A_1, A_2 \dots A_m$, par rapport au pôle O est une courbe de degré r, qu'on appelle $(n-r)^{ème}$ polaire de O par rapport à C^m.

<u>Polaire réciproque</u>. – Figure déduite d'une figure donnée, par rapport à une conique directrice (Voir ce mot), par l'application du procédé de transformation par polaires réciproques, dû à Poncelet.

La transformation par polaires réciproques, en géométrie plane, repose sur le théorème suivant :

Si, par rapport à une conique directrice Γ, une figure C' est l'enveloppe des polaires des points d'une figure C, réciproquement, C est l'enveloppe des polaires des points de C'.

Les deux figures C et C' sont dites polaires réciproques ; à toute propriété ponctuelle (ou tangentielle) de l'une correspond une propriété tangentielle (ou ponctuelle) de l'autre. Les deux figures sont corrélatives ; le passage de l'une à l'autre constitue la transformation par polaires réciproques.

Par rapport à la conique directrice Γ dont l'équation tangentielle est $\Theta(U, V, R) = 0$, la polaire réciproque C' d'une courbe C dont l'équation ponctuelle est $f(X, Y, T) = 0$ a pour équation tangentielle $f(\Theta'_U, \Theta'_V, \Theta'_R) = 0$.

Corrélativement, si la directrice Γ est donnée par une équation ponctuelle $\Theta(X, Y, T) = 0$, la polaire réciproque C' de la courbe C dont l'équation tangentielle est $f(U, V, R) = 0$ a pour équation ponctuelle $f(\Theta'_X, \Theta'_Y, \Theta'_R) = 0$.

La transformation par polaires réciproques est une extension homographique du principe de dualité. En effet, l'application directe de ce principe transforme une courbe $f(X, Y, T) = 0$ en courbe corrélative $f(U, V, R) = 0$; par polaires réciproques, la même courbe $f(X, Y, T) = 0$ est transformée en courbe corrélative plus générale $f(\Theta'_U, \Theta'_V, \Theta'_R) = 0$.

Pour l'étude de la transformation par polaires réciproques, voir les traités de Géométrie supérieure.

M. d'Ocagne. – Sur la relation entre les rayons de courbure de deux courbes polaires réciproques

(Annales Sc. de l'Éc. norm. supre. (3) t. IV. pp. 313-316 ; 1887).

M. d'Ocagne. — Sur les courbes polaires réciproques homologiques (S. M., t. XIII, pp. 204-206, 1884-1885).

L'auteur montre que les seules courbes qui soient homologiques de leurs polaires réciproques, les points correspondants étant les mêmes dans les deux cas, sont les coniques homothétiques à la conique directrice.

Pour une autre démonstration, voir : G. Fouret. — Sur la recherche de deux courbes planes, ou surfaces, dont les points se correspondent chacun à chacun, à la fois par homologie et par polaires réciproques (S. M. t. XIV, pp. 18-20 ; 1885-1886).

Pseudo-chaînette. — La chaînette ordinaire ayant pour équation intrinsèque

$$\rho = a + \frac{s^2}{a}$$

(s, arc ; ρ, rayon de courbure), E. Cesàro a proposé d'appeler pseudo-chaînette la courbe ayant pour équation intrinsèque

$$\rho = K^2 a - \frac{s^2}{a}.$$

La pseudo-chaînette a la forme représentée ci-contre. Elle admet, sur son parcours, deux points asymptotiques.

Voir Geometria intrinseca, p. 17 (Naples, 1896).

Pseudo-cycloïde. — La cycloïde ordinaire ayant pour équation intrinsèque

$$s^2 + \rho^2 = a^2,$$

E. Cesàro a proposé d'appeler pseudo-cycloïdes les courbes ayant pour équations intrinsèques

$$s^2 - \rho^2 = a^2 \qquad \rho^2 - s^2 = a^2$$

et pour formes les figures ci-dessous :

Pseudo-tractrice. — La tractrice (ou courbe aux tangentes égales) ayant pour équation intrinsèque

$$\rho = a\sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1},$$

E. Cesàro a proposé d'appeler pseudo-tractrice la courbe ayant pour équation intrinsèque

$$\rho = Ka\sqrt{1-e^{-\frac{2s}{a}}},$$

La courbe est composée de deux branches asymptotiques à deux circonférences égales. L'origine des arcs est un point cuspidal.

Voir : Geometria intrinseca, p. 18 (Naples, 1896).

Ptéroïde. – Pteroides torricellinæ, dénomination proposée par Casali pour des courbes rencontrées par Evangelista Torricelli, et connues aujourd'hui sous les noms de strophoïdes ou de focales (de Quetelet) (voir ces mots).

Le nom de ptéroïde avait été adopté par Casali en raison de l'analogie de ces courbes avec la forme d'une aile (πτερόν, aile d'oiseau).

Voir Bollettino de B. Boncompagni, t. VIII, 1875, p. 456 ; Bollettino di bibliog. e storia delle sc. matem. de Gino Loria, 1898, pp. 1-7.

Quadran. – Voir : P. Tannery. – Le traité du Quadran de maître Robert Anglès (Montpellier, XIIIe siècle) texte latin et ancienne traduction grecque (561-640) (Notices et Extraits des Manuscrits de la Bibliothèque nationale) (Paris 1897).

Voir aussi Cadran.

Quadrans. – Nom du quart de cercle. Exemple : E. Catalan. Nouvelles notes d'Algèbre et d'Analyse (Bulletins de l'Ac. R. de Belgique, t. XLVIII, 1889, ch. VIII, § 6 : Si l'on considère, sur le quadrans ÂB, une suite indéfinie d'arcs : AM_1, AM_2, AM_3, ... tels que les carrés de leurs sinus forment une série convergente, il en sera de même pour les carrés de leurs tangentes.

Quadratrice de Dinostrate. – Cette courbe a été imaginée par Hippias d'Elis (voir, P. Tannery. Pour l'histoire des lignes et surfaces courbes dans l'antiquité (B. D. 1883, 1re p^ie pp. 278-291).

Autre indication à ajouter à la bibliographie de la courbe : H. Résal : Construction de la tangente en un point de la quadratrice (N. A. 1876, pp. 337-339).

Quartique. – Nom générique de courbe du quatrième degré.

Le mot quartique, non suivi d'adjectif, dési-

gne spécialement une quartique plane.

Le nom de quartique est plus habituellement employé que celui de biquadratique.

La géométrie des quartiques et leur classification en genres et variétés ont fait l'objet d'un grand nombre de travaux, pour les principaux desquels nous renverrons (comme pour la bibliographie des cubiques) à l'ouvrage de Gino-Loria (Teorie geometriche, 1896, pp. 70-74).

La première étude systématique de ces courbes a été faite par Plücker : Enumération des courbes du quatrième ordre, d'après la nature différente de leurs branches infinies (J. M. t. I. pp. 229-252 ; 1836).

Après 1850, nous rencontrons les recherches de Grassmann : Erzeugung der Curven vierter Ordnung durch Bewegung gerader Linien (J. de Crelle. t. XLIV, 1852) ; puis de nombreux travaux parmi lesquels il convient de signaler ceux de Steiner, Hesse, Chasles, de Jonquières, Geiser, Ameseder, Aronhold, Riemann, Cayley, Brill, Nöther, Clebsch, Caporali, Gerbaldi, Cardinaal, E. Laguerre, Brioschi, Cremona, etc. tous géomètres qui pour la plupart ont aussi développé la théorie des cubiques. G. Zeuthen a étudié une classification basée sur les bitangentes réelles. On en trouvera l'indication, avec la géométrie des quartiques, dans l'ouvrage de G. Salmon : Courbes planes (Ch. VI. pp. 302-384 ; 1884).

Voir aussi, pp. 652-654, note sur les bitangentes d'une quartique, par A. Cayley.

Les quartiques peuvent être sans point double, ou avoir un, deux ou trois points doubles. Elles sont alors respectivement de genre 3, 2, 1 ou 0. Elles peuvent aussi être unipartites, bipartites, tripartites et quadripartites.

<u>Quartique annulaire</u>. — Quartique composée de deux ovales, dont l'un est intérieur à l'autre ; ou bien, de deux courbes fermées dont l'une est intérieure à l'autre.

Voir G. Salmon. Courbes planes, p. 310.

<u>Quartique à un seul point double</u>. Pour la bibliographie des quartiques à un seul point double, voir G. Salmon. Courbes planes, qui cite, p. 655 : Brioschi (Math. Annalen, t. IV, 95), Cremona (ibid. 99), et Brill (Ibid. t. VI. 66, et J. de Crelle, t. LXV).

Voir aussi : E. Wölffing (J. M. 1899, 18) qui cite : R. Heermann (Progr. Hersfeld, 1882) ; W. Roberts (London Math. Soc. XXV, 1894) ; W. Wirtinger (Jahrb. der deutsch. Math. Vereinigung. IV. 1894-1895) ; J. de Vries (Nieuw Arch. voor Wisk. (2) III, 1896).

On peut ajouter : Bobek (Sitz. Wien. 1887).

__Quartique binodale__ : Les quartiques binodales sont des quartiques à deux nœuds ou points doubles. Si ces deux nœuds sont les points circulaires à l'infini, les quartiques sont dites bicirculaires.

Les quartiques qui ont les deux points circulaires comme points de rebroussement ont reçu le nom de Cartésiennes.

Les quartiques à deux points de rebroussement sont dites bicuspidales.

Voir G. Salmon, courbes planes, pp. 339-357.

Les quartiques bicirculaires ont 16 foyers sur 4 cercles, et chacun des cercles contient 4 foyers.

Pour les quartiques bicirculaires, voir J. Casey. (Trans. of the R. Irish Acad. t. XXIV, p. 457 ; 1869).

Gino Loria : Remarques sur la géométrie analytique des cercles du plan et sur son application à la théorie des courbes bicirculaires du 4e ordre (Quarterly J. of pure and applied math. t. LXXXV, 1886).

Pour les cartésiennes : voir : Chasles (Aperçu hist. p. 350) ; Quetelet (Nouv. mém. de Bruxelles. t. V) ; A. Cayley (J. M. t. XV. p. 354).

__Quartique gauche__ : Courbe gauche du 4e ordre, c'est-à-dire rencontrée par un plan arbitraire en quatre points, réels ou imaginaires.

La quartique gauche est, en principe, l'intersection de deux quadriques, mais l'intersection de deux surfaces d'ordre supérieur à 2 peut devenir une courbe décomposable en deux autres, dont une quartique. Toutefois, on a établi la distinction entre deux espèces de quartiques gauches :

1° celles qui sont l'intersection de deux quadriques ;

2° celles qui sont l'intersection d'une quadrique et d'une surface du sixième ordre, cette intersection étant alors complétée par deux droites.

Quartique nodale. — Cette désignation s'applique à toute quartique douée de points doubles, mais elle convient plus particulièrement aux quartiques à un seul point double.

Voir ci-dessus. Voir aussi quartique binodale et quartique trinodale.

Quartique sphérique. — L'intersection de deux surfaces du second degré est généralement une ligne du 4e degré. Le degré peut s'abaisser au 3e et aussi au 2e dans des conditions particulières. Toutefois, pour ne parler ici que des courbes du quatrième degré, nous signalerons le cas très simple, mais très intéressant, de la quartique d'intersection d'un cylindre circulaire par une sphère tangente au cylindre, et qu'on pourra tracer sur le cylindre en se servant d'un compas à branches recourbées, dont une pointe s'appuiera au cylindre, tandis que l'autre sera mise à distance rectiligne marquée par le diamètre (ou l'épaisseur) du cylindre.

La construction de cette courbe parait s'adapter à une assertion de Descartes relativement à l'usage d'une courbe cylindrique pour la division du cercle en 27 parties égales. Voir, à ce sujet, N. A. 1864, 222, Lettre de Descartes au P. Mersenne, du 8 oct. 1629, et 1876, 8-9. Ed. Lucas, de la Trisection de l'angle à l'aide du compas sphérique.

Note. — On attribue à Pascal la première idée des fonctions elliptiques, dans l'emploi qu'il a fait de la surface du cylindre circulaire oblique pour représenter la rectification des cycloïdes allongées et accourcies. Mais le droit de cette invention appartient plutôt à Roberval, qui représente ainsi la courbe produite sur un cylindre par la tracé du compas (Traité des Indivisibles). Pascal était d'ailleurs en relations suivies avec Roberval, et ses méthodes ont parfois été d'ingénieuses extensions de la méthode de Roberval qui elle-même empruntait son origine à la sommation donnée par Archimède dans son Traité de la Sphère (A. Aubry).

Quartique tricuspidale. — L'équation générale des quartiques tricuspidales s'obtient en appliquant la transformation quadratique

$$\frac{x'}{yz} = \frac{y'}{zx} = \frac{z'}{xy}$$

à l'équation générale des coniques inscrites au triangle de référence

$$\sqrt{Ax'} + \sqrt{By'} + \sqrt{Cz'} = 0.$$

On obtient ainsi l'équation

$$\sqrt{Ayz} + \sqrt{Bxz} + \sqrt{Cxy} = 0$$

qui représente une quartique tricuspidale, c'est-à-dire une quartique à trois points de rebroussement.

Les tangentes en ces points à la courbe se rencontrent en un même point.

Quartique trinodale. – L'équation générale des quartiques trinodale s'obtient en appliquant la transformation quadratique

$$\frac{x'}{yz} = \frac{y'}{zx} = \frac{z'}{xy}$$

à l'équation générale des coniques

$$f(x', y', z') = 0$$

rapportées au triangle de référence.

Les quartiques trinodales, ou à trois points doubles, sont du genre zero, ou unicursales.

Pour la bibliographie de ces courbes, voir G. Salmon, Courbes planes, pp. 359-362; une quartique trinodale particulière, à trois axes de symétrie, a été étudiée à diverses reprises (N.C. 1874-1875; N.A. 1875, 1889; J.S. 1885, 1886.

Quartique unicursale. – Pour la bibliographie des quartiques unicursales, ou de genre zero, voir G. Salmon, Courbes planes, pp. 357-370.

Quasi-développée. – On appelle ainsi la courbe enveloppe de la quasi-normale, c'est-à-dire de la conjuguée harmonique de la tangente à une courbe par rapport aux droites qui joignent son point de contact à deux points fixes I, J.

Voir G. Salmon, Courbes planes, pp. 130-134.

Quintique. – Les courbes du 5e ordre, ou quintiques, n'interviennent pas fréquemment dans les applications. Le relevé des questions qui conduisent à ces courbes a été fait dans l'Intermédiaire des Mathématiciens (1898, pp. 136-138, 201 et 279); il est encore inférieur à une trentaine. Il est vrai qu'il n'est pas

définitif, mais cela permet de supposer qu'il ne doit pas être beaucoup plus élevé.

Quant à la bibliographie des recherches d'ensemble relatives à leurs propriétés géométriques, on peut citer, d'après Gino Loria (Teorie geometriche, 1896, p. 96): Rohn (Math. Ann. t. XXV, 1885); Eberle (Munich, 1892); Maisano (Math. Ann. t. XXIX, 1887); J. de Vries (Wiener Ber. t. CIV, 1895; Verbl. AK. Amsterdam, t. III, 1894-1895, pp. 115-117); A. Cayley (Proceed. London Math. Soc. 6. IV. 1871-1873).

A cette liste on peut ajouter: E. Laguerre. Sur une certaine quintique (N. A. 1873, pp. 186-187).

Réseau. — Le nom de réseau présente différentes acceptions. Parfois il désigne l'ensemble de courbes dépendant de trois courbes données

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0,$$

et représenté par l'équation générale

$$f_1 + \lambda f_2 + \mu f_3 = 0.$$

Le réseau est dit ponctuel ou tangentiel, selon que les trois courbes sont données par leurs équations ponctuelles ou tangentielles.

L'étude d'un réseau est intimement liée à celle de la jacobienne ou de la cayleyenne.

Un réseau désigne également l'ensemble des courbes de plusieurs familles. Ainsi l'on dit couramment que les lignes de courbure d'une surface forment un réseau de lignes conjuguées orthogonales.

En Optique, on donne le nom de réseau à un corps transparent sur lequel on a tracé une multitude de stries opaques.

On obtient, en général, des réseaux en traçant sur une lame de verre, à l'aide d'un diamant, des lignes parallèles assez rapprochées pour qu'il y en ait de 30 à 100 par millimètre.

Une lame ainsi préparée décompose la lumière par diffraction. Une flamme regardée à travers un réseau se montre entourée de franges aux couleurs du spectre.

Voir les traités d'Optique.

Réseau isométrique. — Conception de Liouville relative à la théorie des surfaces.

Posons

$$L = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2,$$

$$M = \left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2,$$

$$R = \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial z}{\partial \mu}.$$

x, y, z étant les coordonnées rectilignes d'un point d'une surface, et λ, μ ses coordonnées curvilignes.

Liouville a montré que l'on pouvait toujours, sur cette surface, choisir les coordonnées de telle sorte que l'on eût, à la fois, ou bien

$$L = M, \quad R = 0,$$

ou bien

$$L = M = 0.$$

On dit alors que les lignes coordonnées forment un réseau isométrique.

On voit qu'un réseau isométrique peut ne se composer que de lignes imaginaires. Il peut aussi se confondre avec le système des lignes de longueur nulle.

Pour la théorie de ces réseaux, voir H. Laurent, Traité d'Analyse, t. VII, pp. 95-99.

Voici un exemple emprunté à cet ouvrage.

Si un système de coordonnées curvilignes λ, μ, forme un réseau isométrique sur la sphère, les équations de cette surface peuvent s'écrire

$$x = R\,\frac{2\cos\mu}{e^{-\lambda}+e^{\lambda}},$$

$$y = R\,\frac{2\sin\mu}{e^{-\lambda}+e^{\lambda}},$$

$$z = R\,\frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{e^{-\lambda}+e^{\lambda}}.$$

Éliminant λ et μ, on trouve bien

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

<u>Réseau logarithmique</u>.— Abaque disposé en vue d'effectuer graphiquement des calculs logarithmiques.

La vulgarisation de l'emploi de ce réseau est due à W.-F. Durand, professeur à Cornell University, Ithaca (U. S. A.).

Le réseau est livré sur imprimé portant le

nom de papier logarithmique.

La théorie de l'emploi du réseau logarithmique est exposée avec détail par René de Saussure dans la Revue Scientifique (2e Sem. 1894, pp. 748-750).

Soient deux axes rectangulaires Ox, Oy. De l'origine et en s'éloignant de celle-ci, marquons sur les axes les points de divisions 2, 3, 4, ... dont les abscisses et ordonnées représentent $\log 2$, $\log 3$, $\log 4$, etc. Si un point X, Y du plan est aux distances marquées X, Y, ses véritables coordonnées sont

$$x = \log X, \quad y = \log Y.$$

On voit que, si l'on trace sur le papier logarithmique, et sans s'occuper en rien des divisions qu'il porte, une courbe ayant pour équation cartésienne

$$f(x, y) = 0,$$

celle-ci, une fois tracée, exprimera, relativement au réseau logarithmique, la relation

$$f(\log X, \log Y) = 0.$$

Une droite tracée sur le papier logarithmique représente, relativement au réseau, une équation de la forme

$$Y = AX^a,$$

et l'on a ainsi une résolution graphique immédiate de cette équation.

On étend facilement la même méthode à des équations algébriques de la forme

$$Y = AX^a + BX^b + \dots + Mx^m,$$

$A, B, \dots M, a, b, \dots m$ étant des nombres quelconques.

Une équation exponentielle du type

$$a^x + b^x + c^x + \dots + l^x = K$$

pouvant toujours être ramenée à une équation algébrique de la forme précédente, on voit qu'elle peut se résoudre rapidement à l'aide du papier logarithmique et cela avec une approximation bien suffisante.

Voir I. M. 1897, p. 10 (A. Buhl).

Le papier logarithmique se trouve aux États-Unis dans le commerce ; il est absolument impossible de le fabriquer soi-même, tant le tracé est délicat. Les lignes du réseau sont en effet très rapprochées. Il y en a dix dans chaque intervalle 1-2, 2-3, 3-4, ... et elles sont d'autant plus serrées que l'on s'éloigne de l'origine.

Note. — Dans la 5e Edition (1884) de l'Aide mémoire de l'officier du Genie, on trouve, au Ch. VI, (Mines, p. 8) un abaque logarithmique destiné à la résolution de l'équation

$$C = gh^3,$$

C étant l'ordonnée, h l'abscisse, et g une constante. Ce tableau est exactement celui du réseau logarithmique.

Voir aussi : Pillet. Traité de Géométrie descriptive, pp. 228-229 ; 1887.

L'invention du réseau logarithmique parait donc devoir être attribuée à L. Lalanne (Voir I. M. 1898, p. 272)

Rond. — Synonyme de cercle dans l'expression : quart de rond, employée en Architecture.

Robervallienne. — Pour la robervallienne du cercle, voir : Versiera d'Agnesi.

Roulette. — Voici quelques indications à ajouter à la bibliographie des roulettes :

Gigon. — Propriétés élémentaires des roulettes extérieures et intérieures dans les courbes planes (N. A. 1868, pp. 462-471).

E. Habich. — Sur les roulettes (M. 1882, pp. 145-148). L'auteur rappelle que toute courbe peut être regardée comme une roulette (Sturm, Catalan, Resal), de genre cycloïdal (Lamarle, Calcul différentiel, p. 238). Il établit aussi deux propriétés dues à Steiner :

L'aire totale d'une roulette (C) décrite dans le roulement complet d'une courbe convexe et fermée (A) sur une droite (D), par un point quelconque M, est double de l'aire de la podaire de (A) par rapport à M.

Les arcs correspondants MM' et NN', élémentaires ou finis, de la roulette (C) et de la podaire de la courbe mobile (A) par rapport au point décrivant M, sont égaux.

H. Ekama. — Roulettes de coniques (Nieuw Archief v. Wiskunde, t. XVI, 1889, pp. 58-115) (Chacune des coniques roulant 1° sur une droite ; 2° sur une circonférence ; 3° sur une conique congruente, les deux courbes se touchant en des éléments homologues).

Salinon d'Archimède. — Nom donné à la figure formée par quatre demi-cercles ayant

la disposition suivante (où $AB = CD$).

Il faut probablement lire, Selinon, du grec σέλινον, ache ou persil, ou lierre (?). Pour l'historique de cette figure, voir Lemmes d'Archimède, prop. XIV ; Gino Loria : Il periodo aureo della geometria greca. 1895, pp. 135-138 ; L.-A. Sédillot : Notice de plusieurs opuscules mathématiques qui composent le ms. arabe n° 1104 etc. (Notices et extraits des Manuscrits, etc. t. XIII, 1838 ; pp. 126-150 ; 5 pl. — Équations cubiques, pp. 150-156. — Sur les lemmes d'Archimède :

Figure nommée salianous

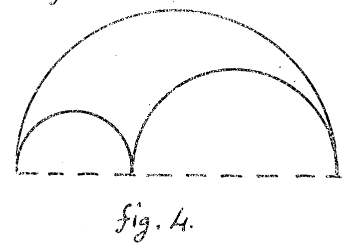


fig. 4.

Surface qu'on nomme Salinoune

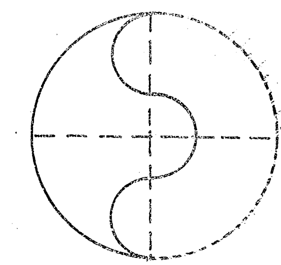
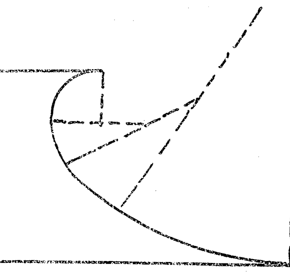
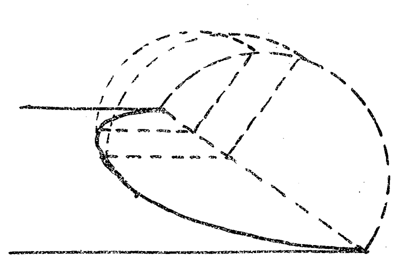


fig. 15.

Note. — PP. 147 et 148 il est fait mention de la locution Diviser en moyenne et extrême raison.

<u>Scotie</u>. — La scotie est une moulure





à raccordement complet, qui se place ordinairement à la base des colonnes et des édifices. Par extension, le nom de scotie désigne également le profil de cette moulure.

La scotie la plus simple est formée de deux

quarts de cercle se continuant (Voir Moulure) mais il peut arriver qu'il soit nécessaire de tracer plusieurs arcs de cercle, par analogie avec ce qui se fait pour le tracé de l'anse de panier à 3, 4 centres et plus.

Parfois aussi on emploie une scotie elliptique obtenue par rabattement des divers points d'un demi-cercle décrit sur la corde de la scotie pour diamètre.

(Voir les figures ci-jointes qui suppléent à une description plus détaillée).

Sécantoïde. – Une ligne importante dans l'Histoire des Mathématiques est la courbe des Sécantes, dont la quadrature (connue d'Albert Girard d'après Huygens, mais publiée pour la première fois par Gregory, dans ses Exerc. geom.) sert à la représentation des Cartes de Mercator (A. Aubry).

Cette courbe a été appelée aussi quelquefois Sécantoïde.

La courbe des sécantes est identique à celle des cosécantes, mais déplacée à la distance $\frac{\pi}{2}$.

Les sommets de ces deux courbes sont ceux de la sinusoïde, courbe représentative des fonctions sinus et cosinus. Les asymptotes, parallèles à Oy, ont pour abscisses les points de rencontre de la sinusoïde avec Ox.

Sectrice. – L'idée première des courbes sectrices est due au physicien Plateau (Corresp. math. et phys. t. IV. 1828). Il dit que deux droites brillantes tournant uniformément autour de deux de leurs points avec des vitesses ω et 2ω déterminent par leurs intersections successives une courbe obscure qui est une focale, et, si elles sont primitivement perpendiculaires, une focale régulière (aujourd'hui nommée strophoïde). (A. Aubry)

La focale a d'ailleurs été signalée aussi comme sectrice pour obtenir la trisection de l'angle, et comme duplicatrice pour résoudre le problème déliaque (duplication du cube). – Voir : Gino Loria : La strophoïde est une sectrice et une duplicatrice (M. 1898, pp. 265-267).

Autres indications bibliographiques :

H. Brocard (I. M. 1898, pp. 95-96).

A. Kempe : La division de l'angle en 2^n+1 parties égales (Nieuw Archief v. Wiskunde, (2) t. I.

1895, pp. 163-171 et 215-216).

A. Kempe. – Les courbes à nœud et leur utilité dans la polysection de l'angle (5e Congrès néerl. de Phys. Amsterdam. 1895, pp. 247-250).

<u>Sélénoïde</u>. – Voir Courbe de Watt.

<u>Serpentine</u>. – A la bibliographie, ajouter: M. d'Ocagne (J. S. 1885, p. 265).

<u>Sextique</u>. – Aux problèmes énoncés dans le premier article, on peut ajouter :

I. Etant donnés des cercles de centre C, tangents à une ellipse en A et à la tangente au point A' diamétralement opposé à A, si, du centre C, on abaisse les 3 normales à l'ellipse autres que CA, le lieu de l'orthocentre H du triangle ainsi obtenu a pour équation

$$(a^2x^2+b^2y^2)(x^2+y^2)^2=(a^2y^2-b^2x^2)^2.$$

E.-N. Barisien (J. M. 1895, p. 20).

II. Lieu du sommet des paraboles tangentes à un cercle donné et ayant pour foyer un point fixe de la circonférence (E.-N. Barisien).

Ce lieu a pour équation

$$2(2x^2+2y^2-Rx)^3=27R^2(x^2+y^2)^2$$

(J. M. 1895, pp. 376-377). La courbe a tout à fait l'aspect du Limaçon de Pascal (courbe à boucle).

III. Soient OA un rayon fixe d'un cercle de centre O (OA = a); OM un rayon variable, P la projection de M sur OA, K le pied de la symédiane du triangle OMP issue de O. Le lieu du point K a pour équation

$$y=\frac{x^2\sqrt{a^2-x^2}}{a^2+x^2}.$$

La courbe est composée de deux piriformes aplaties, opposées par le sommet O qui est un point de rebroussement.

L'aire de la courbe a pour valeur $\pi a^2(3-2\sqrt{2})$. (E.-N. Barisien).

L'étude générale des courbes du 6e degré n'a pas encore fait le sujet de beaucoup de travaux. D'après Gino Loria (Teorie geometriche, 1896, pp. 76 et 161) on peut citer, pour les courbes planes :

A. Cayley : On the mechanical description of certain sextic curves (Proceed. Lond. Math. Soc. t. IV, 1871-1873).

et pour les courbes gauches :

A. Baule : Ueber Raumcurven 6r Ord. (Göttingen. 1872).

Ed. Weyr. – Classif. des C. du 6e ordre dans l'espace (C. R. t. LXXVI. 1873)
London. – Die Raumc. 6r ord. von Geschl. 1 (Math. Ann. t. XLV; 1894)
A. Petot. – Constr. de la c. gauche du 6e ord. et du 1er genre (C. R. t. CVI. 1886)
et deux notes d'E. Pascal (Lincei Rend. (2) V. 1893).

Sinusoïde. – La sinusoïde $y = \sin x$ (aussi bien que $y = \cos x$) a été primitivement appelée compagne de la cycloïde, puis, par Leibniz, ligne des sinus. Son nom de sinusoïde lui a été donné par Belidor dans son ouvrage intitulé : La Science de l'ingénieur.

Note. – On peut rattacher à la sinusoïde les courbes $y = \frac{1}{\sin x}$ (ou $y = \operatorname{cosec} x$) et $y = \frac{1}{\cos x}$ (ou $y = \sec x$) dont la construction s'en déduit immédiatement. Voir Sécantoïde.

Spirale. – Toute courbe admettant un cercle asymptote ou un point asymptote peut être classée dans la famille des spirales, à moins qu'elle n'ait déjà reçu un nom spécial, comme c'est le cas pour la clothoïde, la cochléoïde, la pseudo-chaînette, la pseudo-tractrice, etc.

Dans la cochléoïde, une infinité de branches de la courbe passent par le point asymptote.

Spirale algébrique. – A la bibliographie, ajouter :

Étant données deux droites AB, CD et un point M, on construit
le triangle CDM_1 semblable à ABM
le triangle CDM_2 semblable à ABM_1
le triangle CDM_3 semblable à ABM_2
. . . .

Les points $M, M_1, M_2, M_3 \ldots$ appartiennent à une même spirale logarithmique (M. 1882, p. 46. J. Neuberg).

Spirale d'Archimède. – Pour diverses propriétés de cette courbe célèbre, voir :
M. Chasles (M. 1896, p. 113)
M. d'Ocagne (N. A. 1880, p. 291 ; J. S. 1890, p. 49).
G. Fouret : Les centres de courbure d'une spirale d'Archimède aux points situés sur un même rayon vecteur appartiennent à une même ellipse (N. A. 1869, p. 328)
Gino Loria. – Pascal a démontré que tout arc de parabole est égal à un certain arc de

Spirale d'Archimède.

Fermat étendit cette propriété en établissant que tout arc d'une parabole d'ordre supérieur est égal à un arc convenablement choisi d'une des spirales qu'il avait obtenues en généralisant la définition de la spirale d'Archimède. (Congrès de Zurich. 1897, p. 293).

Clairaut.– De la spirale d'Archimède, décrite par un mouvement pareil à celui qui donne la Cycloïde et de quelques autres Courbes de même genre (Mém. de l'Ac. des Sc. pr 1740; pp. 148-154).

En particulier, le tracé mécanique proposé par Clairaut pour la spirale d'Archimède revient à faire rouler le côté indéfini BM d'une équerre BMC sur un cercle O de rayon OB = MC; dans une de ses positions, le point C coïncide avec le point O, puis décrit la spirale.

En d'autres termes, la spirale d'Archimède est la podaire de la développante de cercle OA par rapport au centre O du cercle, théorème énoncé par A. Mannheim (N. A. 1860, p. 186) (Voir Développante).

Pour le même objet, voir I. M. 1896, p. 240. Gino Loria.

__Spirale de Boulliau__.– Voir le livre publié par Boulliau: Ismaelis Bullialdi De lineis spiralibus demonstrationes novae. Parisiis, Cramoisy; 1657; in-4°.

__Spirales de divers degrés__.– Spirales représentées par l'équation

$$r = K\theta^{-\frac{m}{n}}$$

Dans une lettre de Fermat à P. de Carcavy, il est question de spirales quarrées, cubiques, etc.

__Spirale de Fermat__.– Pour d'autres spirales considérées par Fermat, voir ses Œuvres, t. II, pp. 16-17, en particulier, p. 17, pour l'Helix Galilei.

__Spirale de Fresnel__.– Courbe rencontrée par Fresnel dans la théorie de la diffraction.

Spirale de Pascal.– Intersection d'un cône circulaire droit et d'un cylindre droit, de même axe, ayant pour base une spirale d'Archimède.

__Spirale de Poinsot__.– Cette courbe a pour équation

$r \, ch \, a\theta = c$.

Elle a été étudiée pour la première fois, par Poinsot, dans son Mémoire : Théorie nouvelle de la rotation des corps (J. M. t. XVI, pp. 9-129 ; 1852). Voir I. M. 1898, p. 131. E. Wölffing.

La spirale de Poinsot a reçu aussi le nom d'herpolhodie (Voir ce mot).

Spirale de Cotes. — Le nom de spirale de Cotes est donné par J. Sacchi dans son ouvrage : Sulla geometria analitica delle linee piane, Pavia, 1854, à une courbe dont l'équation est

$$r \cos n\theta = a.$$

Voir I. M. 1898, p. 131. E. Wölffing.

Spirale logarithmique. — Les coordonnées cartésiennes d'un point de la spirale logarithmique peuvent être mises sous forme paramétrique :

$$x = a\,\frac{\cos t - \sin t}{e^t}, \quad y = a\,\frac{\cos t + \sin t}{e^t}$$

J. S. 1890, p. 280. G. de Longchamps.

Si l'on prend les podaires successives obliques d'une courbe C, les points de ces courbes qui correspondent à un même point de C appartiennent à une spirale logarithmique.

M. 1882, p. 154. E. Cesaro.

(Voir aussi Spirale algébrique).

Pour l'histoire de la spirale logarithmique, voici diverses remarques.

I. G. Salmon (Courbes planes, 1884, p. 410) mentionne que la spirale logarithmique a été imaginée par Descartes.

II. Dans la Correspondance de Descartes (à partir de 1637) on trouve indiquée à diverses reprises et comme une courbe dont les géomètres se seraient déjà occupés une spirale qui est la spirale logarithmique définie par une propriété de sa tangente (I. M. 1898, p. 5. P. Tannery).

III. Descartes ne pensait pas qu'elle fît une infinité de spires autour de son pôle. Il a énoncé une propriété de cette courbe qui équivaut à sa rectification et qui serait ainsi la première rectification. Descartes d'ailleurs, ne s'en est pas douté, car il affirme dans sa Géométrie que l'on ne peut comparer les courbes aux droites (A. Aubry).

Spirale parabolique. — Voir Parabole hélicoïdique.

Spirale polaire. — D'après sa définition, cette spirale est l'inverse de la spirale de Fermat. C'est donc la courbe appelée aussi lituus ou trombe.

Spirale tractrice. — Nom donné par Rouquet (N. A. 1863, p. 498) à une tout autre courbe dont l'équation est

$$\theta = \pm\left(\frac{1}{r}\sqrt{a^2-r^2} - \text{arc cos}\,\frac{r}{a}\right),$$

ligne qui avait déjà reçu de Giard (N. A. 1862, p. 76) le nom de tractrice polaire.

La spirale tractrice a pour équation

$$r = \text{sh}.\,a\theta$$

(J. S. 1896, A. Aubry) ou

$$r = \frac{1}{2}\left(e^{a\theta} - e^{-a\theta}\right).$$

Cette courbe avait reçu antérieurement de Dittrich (La spirale logarithmique; Breslau, 1877) le nom de Differenzenspirale, en français Spirale de différence, parce que son rayon vecteur est la différence des rayons vecteurs de deux spirales logarithmiques inverses $r = \frac{1}{2}e^{a\theta}$ $r = \frac{1}{2}e^{-a\theta}$.

(I. M. 1898, pp. 130-131, E. Wölffing).

Steiner-hessienne. — Dénomination primitivement donnée par Cayley à la courbe aujourd'hui appelée Cayleyenne.

Voir G. Salmon, Courbes planes, pp. 506-507.

Steinérienne. — Le nom de Steinérienne, proposé pour désigner l'hypocycloïde triangulaire ou hypocycloïde de Steiner, est à abandonner pour être exclusivement réservé à une famille de courbes qui jouent un rôle analogue à celui de la cayleyenne, de la hessienne et de la jacobienne.

La Steinérienne d'une courbe donnée C^m de degré m est le lieu des points dont la première polaire a un point double. Elle est aussi le lieu des points qui sont des points doubles sur les coniques polaires. Si C^m a un rebroussement, la tangente cuspidale correspondante fait partie de la Steinérienne. Elle est tangente aux tangentes stationnaires de C^m et a même genre que la hessienne de C^m.

Soit

$$f(x.\,y.\,z) = 0$$

l'équation de C^m, z étant simplement introduit

pour établir l'homogénéité.

La première polaire de cette courbe pour le point (x_0, y_0, z_0) sera

$$x_0 \frac{\partial f}{\partial x} + y_0 \frac{\partial f}{\partial y} + z_0 \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Si celle-ci a constamment un point double, on doit avoir :

$$x_0 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y_0 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + z_0 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0,$$

$$x_0 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y_0 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + z_0 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0,$$

$$x_0 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + y_0 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + z_0 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

On obtiendra l'équation de la Steinérienne en éliminant x, y, z entre ces équations, ce qui donnera une courbe de degré $3(m-2)^2$.

On voit que la steinérienne d'une courbe du 3e degré est aussi du 3e degré. Dans ce cas, la steinérienne est identique avec la hessienne.

La steinerienne d'une courbe C^m a pour caractéristiques pluckériennes les quantités suivantes :

$$m' = 3(m-2)^2,$$
$$n' = 3(m-1)(m-2).$$
$$\delta' = \frac{3}{2}(m-2)(m-3)(3m^2-9m-5).$$
$$\varkappa' = 12(m-2)(m-3).$$
$$\tau' = \frac{3}{2}(m-2)(m-3)(3m^2-3m-8).$$
$$\iota' = 3(m-2)(4m-9).$$

Voir les ouvrages de Cremona, Clebsch, etc. et G. Salmon (courbes planes, 1884, pp. 82, 214, 505-508.

<u>Stelloïde</u>.- Une stelloïde S_n d'ordre n est le lieu des points tels que leurs droites de jonction à n points fixes (ou pivots) forment avec une direction donnée des angles ayant une somme constante. S_1 est une droite; S_2, une hyperbole équilatère.

Les n asymptotes de S_n divisent le plan en n fuseaux égaux à $\frac{2\pi}{n}$.

Le centre du système de ces n droites est le centre des moyennes distances des points (G. Fouret).

Les trajectoires des stelloïdes S_n ayant un point commun sont des cassiniennes générales (c'est-à-dire les courbes pour lesquelles

$r_1 r_2 \cdots r_n = a^n$ (F. Lucas).

Strophoïde (droite ou oblique). — Le nom de strophoïde ayant été adopté — quitte à y ajouter la qualification de droite ou d'oblique, — pour désigner deux courbes de même nature et présentant des propriétés identiques ou similaires, il paraît sans inconvénient de fusionner à leur sujet les données utiles à leur historique.

La strophoïde a été découverte par Torricelli, qui la considérait comme le lieu des foyers des sections planes produites dans un cône droit par les plans qui passent par une tangente perpendiculaire à une des génératrices du cône.

En 1645, elle était l'objet des études des mathématiciens français. Dans une lettre en italien de du Verdus (élève de Roberval) à Torricelli, il lui parle d'une courbe dont les français s'occupent depuis quelque temps, qu'ils appellent l'aile ou ptéroïde (ala overo teroide), qu'ils construisent comme on le fait aujourd'hui, et dont ils déterminent la tangente par la méthode de Roberval.

Mais du Verdus a inexactement figuré la courbe, en la complétant par une ligne symétrique qu'il croyait nécessaire à la constitution de la courbe. La Géométrie analytique était alors à son début et on faisait de faux emplois de ses principes. C'est de là que venait probablement son nom de ptéroïde, une moitié de la courbe rappelant la forme d'une aile d'oiseau (πτερον) (cette lettre a été publiée dans le Bollettino de B. Boncompagni, t. VIII, 1875, p. 456).

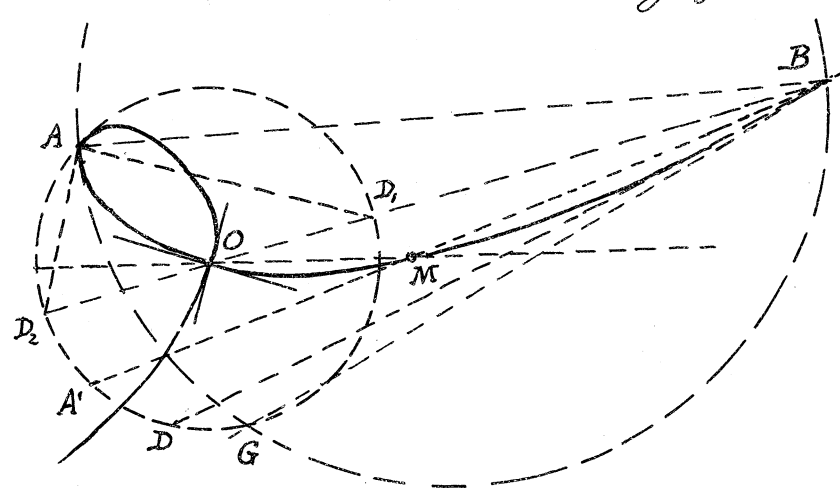
La strophoïde a été étudiée, au même point de vue que celui de Torricelli, par Guido Grandi, dans un traité inédit, et après par Grégoire Casali, dans deux remarquables mémoires. Elle a encore été définie de la même manière, par Quetelet en 1819 et étudiée ensuite par Dandelin et Chasles.

En 1715, A. de Moivre obtint la strophoïde comme lieu géométrique défini par le moyen d'un angle : A ready description and quadrature

of a curve of the third order, resembling that commonly called the Foliate (Philosoph. Transact. 1715). (Le titre de cette communication fait allusion à l'analogie de la strophoïde avec la courbe appelée Feuille ou Folium de Descartes).

En 1877, E. Sang l'a rencontrée aussi, mais sans reconnaître son identité, à l'occasion d'une question d'optique : Lieu des points d'incidence M de rayons issus d'un point fixe A, aboutissant à l'œil placé en B, après réflexion sur un miroir (rectiligne) OM tournant autour d'un point fixe O.

Un point M résulte de l'intersection de la droite OM et de la droite BA' joignant B



à l'image A' du point A sur le miroir OM.

On reconnaît aisément que la courbe (M) est une cubique passant une fois par A et B et deux fois en O où les tangentes sont rectangulaires et parallèles aux cordes AD_1, AD_2 correspondant au diamètre D_1OD_2 passant par B. La cubique est donc une strophoïde.

La tangente en B est la ligne DB qui joint B au symétrique D de A par rapport à OB (ou à l'image D de A dans le miroir OB).

L'asymptote est parallèle à la direction BG pour laquelle l'angle AGB est droit. Ce point G est à la rencontre de la circonférence OAD avec la circonférence décrite sur AB comme diamètre.

Il serait aisé d'ajouter un grand nombre d'autres modes de génération de la strophoïde ; mais nous pensons que ces indications pourront suffire.

Aux indications bibliographiques données dans un premier article, on peut ajouter :

Gino Loria. – Identité de la strophoïde avec la focale à nœud. Son application à l'optique géométrique (N. A. 1897, pp. 262 – 265).

A. Aubry. – Remarques diverses.

Gino Loria. – Congrès de Zurich. 1897. p. 292.

M. d'Ocagne. – J. S. 1888, p. 202.

A. Cazamian. – Sur les applications des propriétés de la strophoïde (N. A. 1895, pp. 192 – 197) et d'autres articles du même auteur.

Gino Loria. Per la storia di alcune curve piane. I. La strofoide. (Bollett. di bibliogr. etc. pp. 1 – 7. 1898).

Parmi les doubles générations de la courbe, nous mentionnerons encore les suivantes :

Soient AB un diamètre fixe d'un cercle O, AD une corde variable, E la projection de D sur AB.

La bissectrice intérieure de l'angle DAB rencontre DE en M et DB en N. Chacun des points M, N décrit une strophoïde droite.

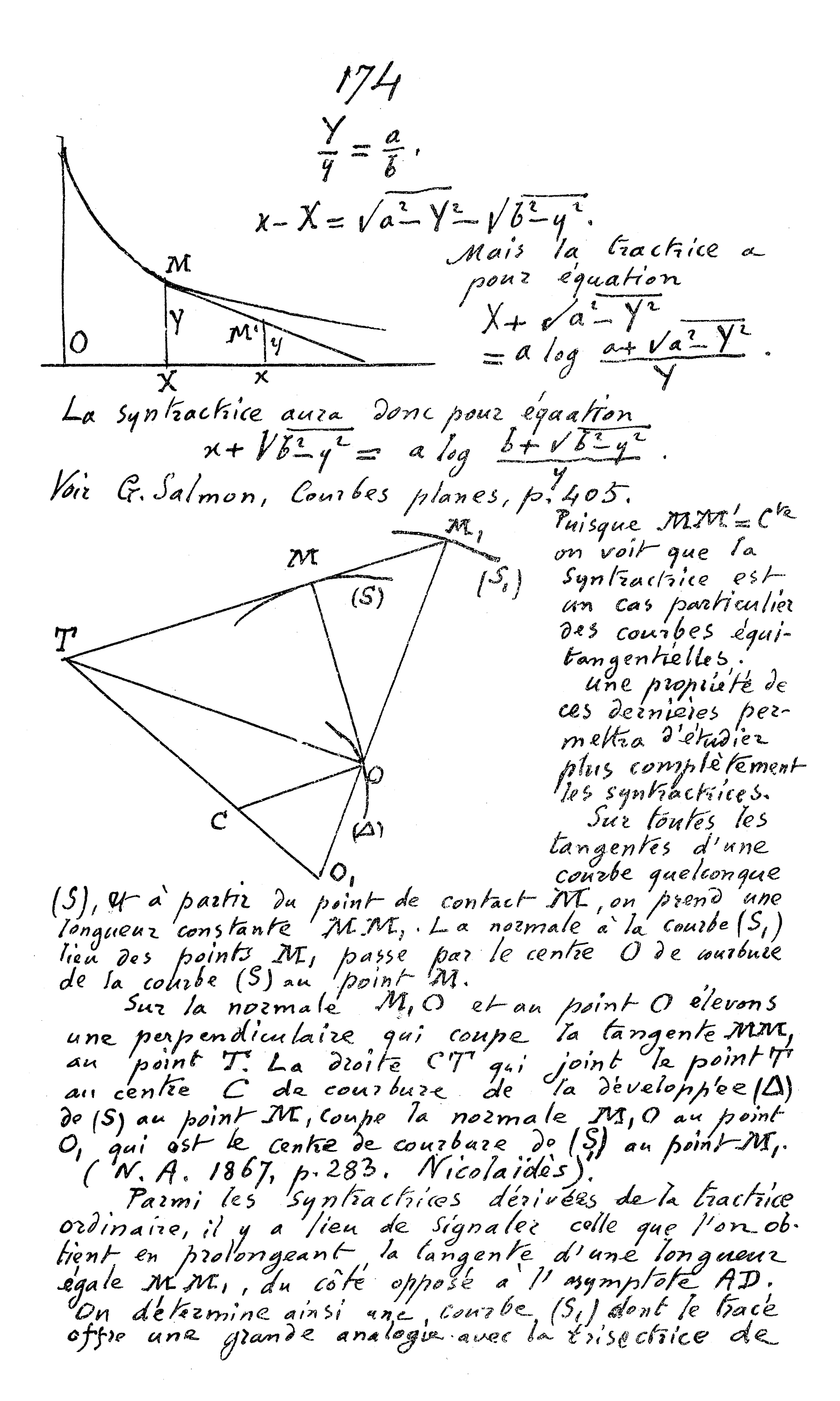
Il en est de même des points M', N' d'intersection de DE et DB avec la bissectrice extérieure de l'angle DAB.

Les bissectrices de l'angle DBA donnent lieu aussi à quatre points M_1, N_1, M_1', N_1', qui décrivent chacun une strophoïde droite (E.-N. Barisien).

a désignant la distance du point double de la strophoïde droite à l'asymptote ou au sommet de la boucle, l'aire de la boucle a pour valeur $a^2 - \frac{\pi a^2}{4}$, et l'aire de la courbe limitée à l'asymptote a pour expression $a^2 + \frac{\pi a^2}{4}$.

<u>Syntractrice</u>. – La syntractrice est le lieu des points qui divisent la tangente constante de la tractrice dans un rapport constant.

Soient X, Y les coordonnées du point M de la tractrice, x, y, celles du point M' de la syntractrice, MT = a et M'T = b. On aura



$$\frac{Y}{y} = \frac{a}{b}.$$

$$x - X = \sqrt{a^2 - Y^2} - \sqrt{b^2 - y^2}.$$

Mais la tractrice a pour équation

$$X + \sqrt{a^2 - Y^2} = a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - Y^2}}{Y}.$$

La syntractrice aura donc pour équation

$$x + \sqrt{b^2 - y^2} = a \log \frac{b + \sqrt{b^2 - y^2}}{y}.$$

Voir G. Salmon, Courbes planes, p. 405.

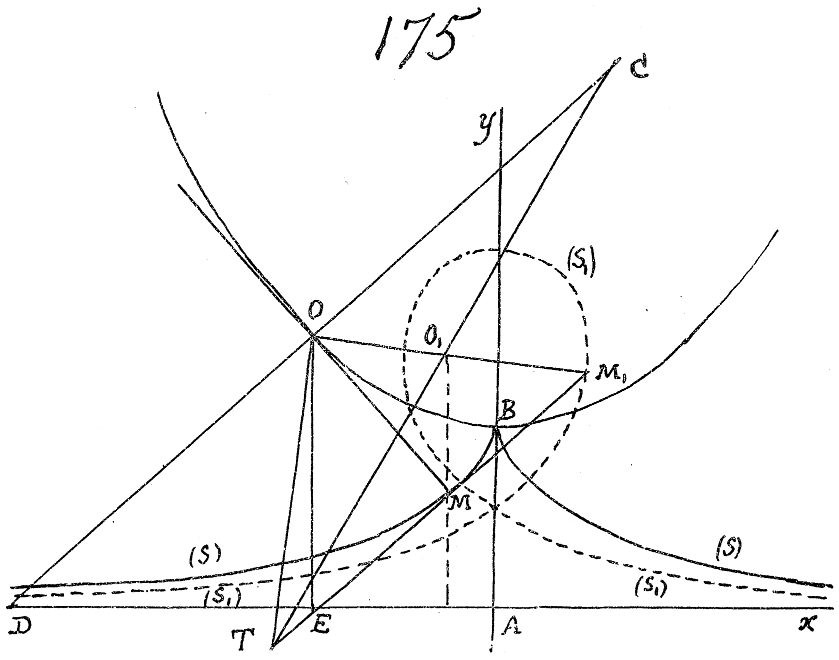
Puisque $MM' = C^{te}$ on voit que la syntractrice est un cas particulier des courbes équitangentielles.

Une propriété de ces dernières permettra d'étudier plus complètement les syntractrices.

Sur toutes les tangentes d'une courbe quelconque (S), et à partir du point de contact M, on prend une longueur constante MM_1. La normale à la courbe (S_1) lieu des points M_1 passe par le centre O de courbure de la courbe (S) au point M.

Sur la normale M_1O et au point O élevons une perpendiculaire qui coupe la tangente MM_1 au point T. La droite CT qui joint le point T au centre C de courbure de la développée (Δ) de (S) au point M, coupe la normale M_1O au point O_1 qui est le centre de courbure de (S_1) au point M_1. (N. A. 1867, p. 283. Nicolaïdès).

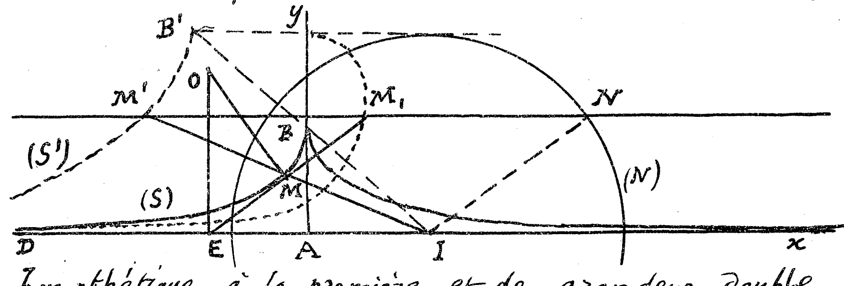
Parmi les syntractrices dérivées de la tractrice ordinaire, il y a lieu de signaler celle que l'on obtient en prolongeant la tangente d'une longueur égale MM_1, du côté opposé à l'asymptote AD. On détermine ainsi une courbe (S_1) dont le tracé offre une grande analogie avec la trisectrice de



Mac-Laurin.

Pour appliquer le théorème susmentionné, on observera que OM est tangente à la chaînette au point O qui a pour abscisse AE, et que OC est égale et de signe contraire à la normale OD. Mais, si la tractrice est la courbe (S), les syntractrices sont la courbe (S_1) et la droite AD. Les centres de courbure des deux lignes (S_1) et AD étant en ligne droite avec le point M, on en conclut que le point O_1 est le milieu de OM_1 (M. d'Ocagne, N. A. 1891. p. 86); en d'autres termes, le point O_1 est sur l'ordonnée du point M.

La même courbe (S_1) peut se définir par une autre construction. Prenons un point I fixe sur Ax, et prolongeons le rayon vecteur IM du point M de la tractrice (S) d'une longueur égale MM'. Le lieu des points M' sera une tractrice B'M'(S')



homothétique à la première et de grandeur double.

D'autre part, si du point I comme centre avec $IN = EM + MM_1 = EM_1$ pour rayon, l'on décrit une circonférence (N), si l'on mène IN parallèle à EM_1, on aura $IN = EM_1$, et par suite, M_1 sera le milieu de NM'. La ligne M_1 ou (S_1), ou la Syntractrice, sera la ligne moyenne entre la tractrice (S) et la circonférence (N).

Dans l'application de cette construction, il faudra avoir soin d'associer des arcs (S), (N), dont la convexité soit de même sens (M. d'Ocagne, loc. cit. p. 85).

L'aire de la boucle est équivalente à celle du reste de la courbe entre celle-ci et l'asymptote (Ibid. p. 87).

Voir : M. d'Ocagne : Sur une courbe définie par la loi de sa rectification (N. A. 1891, pp. 82-90).

Système. – Un système de courbes est l'ensemble des courbes de même nature et de même degré qui satisfont à des conditions données.

L'énumération des courbes composant un système a été faite par divers géomètres, notamment par Chasles, E. de Jonquières, Zeuthen et Cayley.

Chasles a imaginé d'employer deux caractéristiques pour définir chaque système. Ces deux caractéristiques, μ, ν, désignent, respectivement, le nombre des courbes qui passent par un point arbitraire, et le nombre des courbes qui sont tangentes à une droite arbitraire.

Pour la théorie et les principales applications, voir G. Salmon, Courbes planes, 1884, pp. 516-534 ; de Jonquières (J. M. 1861) ; M. Chasles (C. R. 1864-1867) ; Zeuthen (N. A. 1866) ; Cayley (Phil. Trans. 1867 ; C. R. t. LXXIV, p. 708, 1872, et t. LXXV, pp. 703 et 950, 1872).

Tangentielle. – Pour une définition de la courbe considérée sous ce nom par Halphen, voir l'Etude sur les points singuliers (§§ 17-23) ajoutée à l'Ouvrage de G. Salmon (Courbes planes).

G. Halphen appelle tangentielle d'une courbe, par rapport à un point O de son plan, le lieu du point M_1 d'intersection d'une tangente

mobile de la courbe avec la normale menée au point O au vecteur OM du point de contact M. En appelant r_1 et θ_1 les coordonnées polaires de M_1 par rapport à O, r et θ celles de M, on a

$$\theta_1 = \theta + \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{r_1} = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}.$$

A partir d'un rang toujours limité, les degrés et les classes des tangentielles successives d'une courbe algébrique quelconque forment deux progressions arithmétiques de même raison.

Si, par rapport à un cercle de rayon 1, ayant son centre en O, on prend les polaires réciproques C' et C_1' d'une courbe C et de sa tangentielle C_1 (par rapport à O) la courbe C_1' est la développée de C'. (Y. Halphen. loc. cit.)

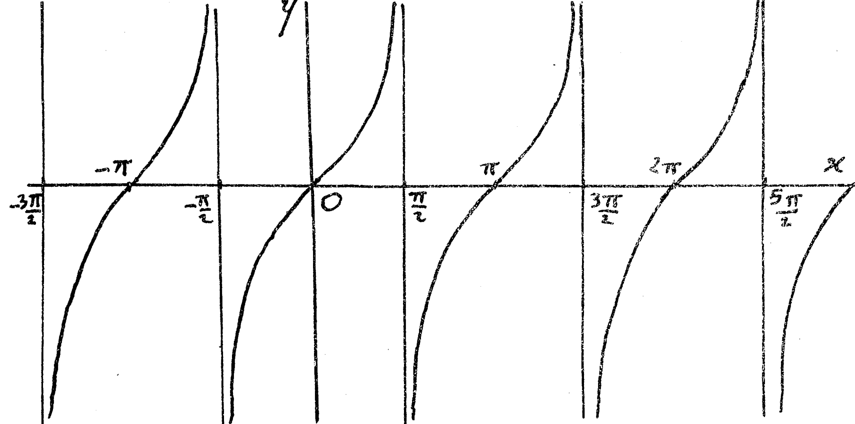
Quelquefois la dénomination de tangentielle est prise dans une autre acception, tandis que la tangentielle d'Halphen est dite tangentielle polaire (Polartangentenkurve).

Cf. L. Henkel, Inaug. Diss. Marburg. 1882; Münger, Inaug. Diss. Bern. 1894.

Tangentoïde.- Courbe représentative de la tangente ou de la fonction tang x. Elle a pour équation

$$y = \operatorname{tang} x.$$

La courbe se compose d'une infinité de branches



hyperboliques égales, asymptotes aux droites $x = K\frac{\pi}{2}$ et rencontrant l'axe Ox à tous les points y = o, x = Kπ, qui sont à la fois centres et points d'inflexion. La tangente en ces points est inclinée à

45°

La courbe

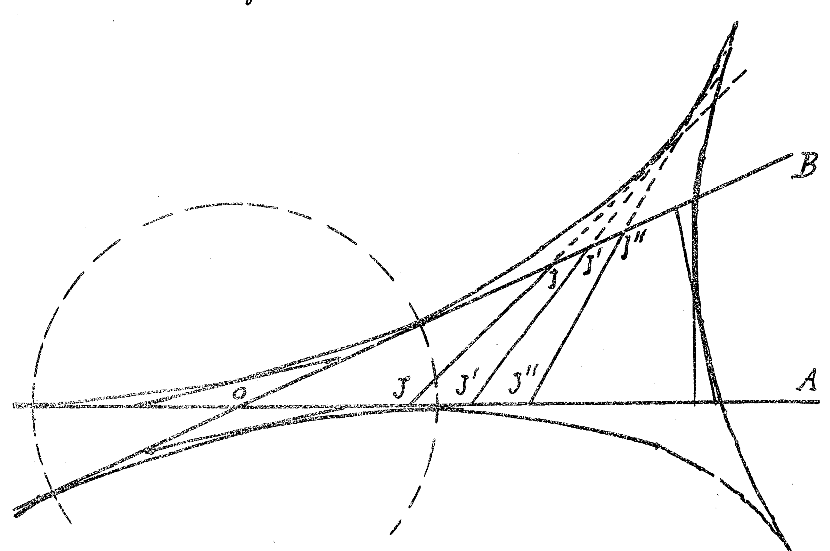
$$y = \cot g\, x,$$

est l'inverse de la précédente. Elle est composée d'éléments analogues, asymptotes aux droites $x = K\pi$, mais rencontrant l'axe Ox sous un angle de $-45°$ aux points $y=0$, $x = K\frac{\pi}{2}$, qui sont à la fois, centres et points d'inflexion.

<u>Tautochrone</u>. — A la bibliographie des courbes tautochrones, ajouter :

Tautochronisme des épicycloïdes quand on a égard au frottement (J. M. (2) t. XIII, p. 204. Haton de la Goupillière).

<u>Tétracuspide</u>. — Rappelons que la tétracuspide est l'enveloppe d'un segment rectiligne IJ de longueur constante. a, dont les extrémités s'appuient sur deux droites fixes, formant un angle donné $AOB = \gamma$.



Lorsque l'angle donné γ est voisin de 90°, le tracé de la courbe pourrait faire supposer que ses rebroussements sont sur les deux directrices. Il n'en est rien et l'on se rend mieux compte de la réalité, en supposant l'angle γ assez petit, et figurant diverses positions IJ, I'J', I''J'',... du segment mobile a. On voit alors que les points de rebroussement sont situés dans les angles obtus formés par les deux droites OA, OB.

L'enveloppe est tangente aux deux droites OA, OB en quatre points distants de a de l'origine.

La tétracuspide a l'origine pour centre et les deux bissectrices de l'angle donné pour axes de symétrie.

Voir J. M. 1898, pp. 160-163 et p. 248.

L'aire de la courbe a pour expression

$$\frac{\pi a^2}{8\sin^2\gamma}(1+2\sin^2\gamma)$$

(E. Duporcq) (loc. cit. p. 160) et son périmètre a pour longueur

$$(\pi\cos\gamma+6)\frac{a}{\sin\gamma}$$

(G. Teixeira) (Ibid, p. 163).

Toroïde. — La toroïde possède huit points doubles, dont quatre à l'infini, savoir : les deux points circulaires et les deux points à l'infini de l'ellipse ; les quatre autres sont placés deux à deux sur les axes et ont pour coordonnées (réelles ou imaginaires)

$$b^2x^2=(a^2-b^2)(b^2-K^2),$$
$$a^2y^2=(a^2-b^2)(K^2-a^2).$$

Les douze rebroussements de la toroïde sont donnés par les équations

$$x^2+y^2-K^2-a^2-b^2+3(abK)^{\frac{2}{3}}=0$$
$$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2-(a^2+b^2)K^2+3(abK)^{\frac{4}{3}}=0.$$

Ce sont les centres de courbure aux points de l'ellipse pour lesquels le rayon de courbure est égal à K. Ils sont tous imaginaires, à moins que K ne soit compris entre $\frac{b^2}{a}$ et $\frac{a^2}{b}$.

Si K est entre ces deux limites, il y a quatre rebroussements réels et huit imaginaires.

Si $K=\frac{b^2}{a}$, les quatre points réels vont se réunir deux à deux aux deux points doubles placés sur l'axe des x.

Si $K=\frac{a^2}{b}$, ils se réunissent deux à deux aux deux points doubles placés sur l'axe des y.

Note. — A la bibliographie de la toroïde il y a lieu d'ajouter un travail nouvellement paru, intitulé : F. Gomes Teixeira : Sur les courbes parallèles à l'ellipse. (39 pages) (Extrait du t. LVIII des Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique. 1898).

Tractrice. — La tractrice, ou courbe aux tangentes égales, a été appelée primitivement

tractoria, puis tractoire.
De Sluse, en 1662, dans une lettre à Huygens, parle de la courbe dont les tangentes sont égales.
Leibniz dit d'ailleurs que Perrault, non moins célèbre comme médecin que comme constructeur de la colonnade du Louvre (Voir aussi : Boileau, Art poétique, chant IV) lui avait proposé l'étude de la courbe que décrirait sa montre, tirée sur un plan horizontal par sa chaîne, l'extrémité de celle-ci se mouvant en ligne droite.
Son nom, tractoria, lui a été donné par Huygens.
La tractoire a été parfois confondue avec la cycloïde. Voir, par exemple, J.-F. Français : Problème de la tractoire (Annales de Gergonne, t. IV. pp. 305-310. 1813-1814).
Ce problème, dit l'auteur, se trouve résolu par Clairaut (AC. des Sc. 1736). Le lieu cherché est une cycloïde. Une impulsion donnée à une tige dont une extrémité se meut en ligne droite donne à l'autre extrémité un mouvement cycloïdal (Voir l'article Cycloïde, § cycloïdes diverses).
Clairaut s'était occupé de cette étude à l'occasion d'une discussion avec Fontaine qui avait pris ce problème pour celui de la courbe aux tangentes égales ou tractrice.
Gergonne résout cette dernière question (p. 317) et donne pour équation de la tractrice

$$x = \sqrt{a^2-y^2} - a\,L\,\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} + C.$$

La tractrice, tournant autour de son asymptote engendre une surface de révolution dont l'importance a été mise en lumière par E. Beltrami, qui lui a donné le nom de pseudosphère.
La pseudosphère sépare, pour ainsi dire, les deux types de surfaces à courbure totale constante négative, comme la sphère sépare les deux types de surfaces à courbure totale constante positive.
Voir : E. Cesaro : Geometria intrinseca. Naples 1896. p. 178.
À la bibliographie de la tractrice, ajouter : M. d'Ocagne (N. A. 1884, p. 552).
<u>Tractrice compliquée</u>. — Podoïde de

la spirale hyperbolique, étudiée par Cotes, dans l'ouvrage: Harmonia mensurarum.

Trajectoire orthogonale. — Parmi les exemples de trajectoires orthogonales, nous mentionnerons les suivants:

I. Paraboles confocales et coaxiales:

$$y^2 = 2ax + a^2.$$

Trajectoires orthogonales:

$$y^2 = -2cx + c^2.$$

c'est-à-dire d'autres paraboles.

N. A. 1868, p. 132.

II. Paraboles coaxiales et de même sommet:

$$y^2 = 2ax$$

Trajectoire orthogonale:

$$y^2 + 2x^2 = c^2$$

ou une ellipse.

N. A. 1868. p. 132.

III. Paraboles égales, tangentes en leur sommet à une droite fixe:

$$(y-a)^2 - 2px = 0.$$

Trajectoire orthogonale:

$$(y-c)^2 = \frac{8}{9p} x^3$$

Développée d'une parabole.

N. A. 1873. p. 185.

IV. Tangentes à l'astroïde.

$$x + my = \frac{lm}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Les trajectoires orthogonales, ou développantes de l'astroïde, sont formées d'une certaine épicycloïde et de ses courbes parallèles.

N. A. 1884, p. 438.

V. Spirales logarithmiques égales et de même pôle.

La trajectoire orthogonale est une nouvelle spirale logarithmique.

N. C. 1880, pp. 130-131 et 333.

VI. Circonférences ayant pour équation

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + a^2 = 0.$$

où a est constant et λ variable.

Ces circonférences ont leurs centres sur Ox et elles ont pour rayons les longueurs des tangentes menées de leurs centres au cercle O de rayon a:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Ce cercle O fait partie des trajectoires orthogonales, mais le réseau de ces courbes comprend

aussi les circonférences

$$x^2+y^2-a^2\pm 2Cy=0$$

ayant leurs centres sur Oy et passant par les deux points $x=\pm a$.

M. 1883, pp. 70-71.

VII. Dans la théorie du potentiel, le réseau des lignes de force représente les trajectoires orthogonales des lignes de niveau ou équipotentielles.

VIII. Les lignes halysiques et les lignes isodynamiques forment un réseau de trajectoires orthogonales.

IX. Une surface de révolution peut être assimilée à une surface topographique en supposant son axe vertical. Les parallèles sont les lignes de niveau et les méridiens les lignes de plus grande pente. Ces deux familles de lignes planes forment un réseau de trajectoires orthogonales.

X. Ellipses de Cassini, ayant pour foyers deux points donnés F, F'.

Les trajectoires orthogonales sont des hyperboles équilatères ayant un des points F, F' pour centre et passant par l'autre point.

La branche d'hyperbole passant par l'un des points F est seule orthogonale aux cassiniennes, l'autre branche ne peut le devenir ; elle est d'ailleurs tangente à une des cassiniennes, ce qui suffirait à prouver qu'elle ne fait point partie des trajectoires orthogonales.

Voir J.-A. Serret. Calcul intégral. pp. 446-447, 1868.

XI. Les courbes d'égal module et les courbes d'égal argument forment un réseau de trajectoires orthogonales.

XII. Les géodésiques passant par un point d'une surface forment avec les cercles géodésiques ayant ce point pour centre un réseau de trajectoires orthogonales.

On voit par ces exemples dont il serait aisé d'augmenter le nombre, que le problème des trajectoires orthogonales se rencontre fréquemment en Géométrie et donne lieu à des applications aussi variées qu'intéressantes.

<u>Trajectoire réciproque.</u> — Comme exemple de trajectoires réciproques, on peut citer la tractrice de tangente a et une circonférence de rayon a ayant son centre sur

l'asymptote de la tractrice.

Transformée. — A l'égard des transformations, il y aurait tout un chapitre à faire sur les transformées dualistiques et sur les transformées homographiques, mais cela nous écarterait du but plus spécial d'un Répertoire de bibliographie mathématique.

D'ailleurs, une transformation quelconque appliquée à une courbe fait dériver de cette courbe une autre ligne qui peut même être une ligne droite.

En définitive, toute courbe peut être considérée comme dérivée d'une autre courbe par une transformation de telle ou telle nature.

Cette proposition est intuitive pour certaines transformations ; c'est ainsi que bien évidemment, toute courbe est une roulette, une podaire, une antipodaire, etc. propositions aussi manifestes que celle qui définit une courbe comme développante ou comme développée d'une autre courbe.

On remarquera, en passant, la dualité de ces propriétés ; à chaque proposition directe correspond une proposition inverse.

Dans la pratique, la difficulté est de trouver des solutions simples et présentant une corrélation bien définie.

Tricuspide. — Nous proposons de donner la dénomination unique et abréviative de tricuspide à la courbe appelée hypocycloïde à trois rebroussements. Il ne peut en résulter d'équivoque pour d'autres courbes présentant des analogies de tracé. Cette proposition paraît pouvoir être adoptée, d'autant mieux que l'hypocycloïde à trois rebroussements est fréquemment désignée dans les ouvrages de mathématiques anglais et italiens sous le nom d'hypocycloïde tricuspide.

Note. — Pour la bibliographie de cette hypocycloïde, voir : Gino Loria : Teorie geometriche. 1896, p. 75. I.M., 1896, pp. 166-168 (H. Brocard); et 1897, pp. 7-8 (V. Retali).

A signaler aussi la propriété de cette courbe : L'axe d'une parabole inscrite dans un triangle quelconque enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements (I.M. 1894, pp. 13, 159 ; 1897, p. 54).

Trifolium pratense. — Cette ligne est un exemple de feuille géométrique ou de courbe botanique.

Voir feuille géométrique.

Trisectrice de Mac-Laurin. — Nous avons fait remarquer la corrélation entre le folium de Descartes et la trisectrice de Mac-Laurin. Le folium est une des projections de la trisectrice, et ces deux lignes représentent un groupe de courbes affines. Le rapport des deux ordonnées est $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Ainsi

$$y_F = \frac{y_T}{\sqrt{3}}.$$

Ceci explique l'analogie qui existe entre les aires des deux courbes :

L'aire de la boucle est équivalente à l'aire comprise entre la courbe et son asymptote.

Le folium étant représenté par l'équation

$$x^3 + y^3 = 3axy,$$

admet pour asymptote la droite

$$x + y + a = 0.$$

Si on le fait tourner de 225°, il a pour équation

$$y = x\sqrt{\frac{3a\sqrt{2} + 2x}{3a\sqrt{2} - 6x}}$$

ou

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3a\sqrt{2} + x}{a\sqrt{2} - x}}.$$

La trisectrice de Maclaurin, rapportée aux mêmes axes de coordonnées, a pour équation

$$y = x\sqrt{\frac{3A + x}{A - x}}.$$

L'aire de la boucle a pour expression

$$3A^2\sqrt{3}.$$

Mais l'aire de la boucle du folium a pour expression

$$3\frac{a^2}{2}$$

(J.-A. Serret, Calcul intégral. 1868, pp. 238-240).

On doit donc avoir

$$3\frac{a^2}{2} = 3A^2\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ou

$$A = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Voir aussi I. M. 1898, p. 104.

Nous avons vu que la trisectrice admet différentes constructions géométriques par points

et par tangentes.

Aux détails donnés à ce sujet, il nous suffira d'ajouter les indications bibliographiques suivantes :

La trisectrice de Mac Laurin est le lieu géométrique du centre du cercle d'Euler des triangles formés par un rayon fixe d'un cercle, un rayon mobile, et la corde joignant leurs extrémités (M. 1893, quest. 852, p. 274. Déprez).

Sur la trisectrice de Mac Laurin (M. 1899, pp. 61-63. V. Jerabek).

Trombe. — Autre dénomination du lituus ou de la spirale polaire. — Voir ces mots.

Velaria. — Courbe suivant laquelle se forme la voile du vaisseau, sous la pression du vent.

Jacques Bernoulli avait étudié cette courbe déjà dans sa note : Curvatura veli (Acta Eruditorum. 1692, pp. 202-207) où il fit voir qu'elle était identique à la chaînette (ou bien au cercle, si le vent trouve aussitôt une issue).

L'identité de la velaria avec la chaînette fut démontrée aussi par Jean Bernoulli dans l'année 1692 du Journal des Savants.

Versiera. — Dans un article de la Bibliotheca mathematica, 1897, pp. 7-12, intitulé : Versiera, Visiera e Pseudo-versiera, Gino Loria a discuté les trois courbes portant respectivement ces dénominations.

Voici un résumé de cet article.

La versiera d'Agnesi ou simplement la versiera, est la courbe habituellement appelée cubique d'Agnesi ou courbe d'Agnesi.

Agnesi la définit par la proportion $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{BM}$ (Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana. Milano. 1748, pp. 380-381).

y C E B D M O L A x

On a ainsi l'équation

$$\frac{y}{\sqrt{y(a-y)}} = \frac{a}{x}$$

ou

$$x^2 = a^2\frac{a-y}{y}.$$

L'asymptote est l'axe Ox ou $y=0$.

Les coordonnées du point M peuvent d'ailleurs s'obtenir très simplement sous forme paramétrique, car en désignant l'angle EAC par φ, on a immédiatement

$$x = CE = a \operatorname{tang} \varphi, \quad y = BA = a \cos^2 \varphi,$$

d'où

$$y = \frac{a^3}{a^2+x^2}.$$

L'aire de la versiera d'Agnesi est πa^2, c'est-à-dire 4 fois celle du cercle générateur.

G. Peano (Appl. geom. del calcolo infinit. Turin 1887, p. 87) a appelé visiera une courbe, lieu des milieux des segments DE de la sécante ADE, entre le cercle AC et la tangente CE. Elle a donc pour équation polaire

$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sin\theta} + a \sin\theta\right)$$

ou

$$x^2 = 2y^2 \frac{a-y}{2y-a}.$$

L'asymptote est la droite OL parallèle à OX $(y=\frac{a}{2})$.

L'aire de la visiera est $\frac{5}{32}\pi a^2$, ou les $\frac{5}{4}$ de celle du cercle générateur (L'aire est, bien entendu, limitée à l'asymptote OL).

Enfin, G. de Longchamps (Essai sur la Géom. de la règle et de l'équerre. Paris, 1890, p. 111) a cru devoir attribuer à la courbe d'Agnesi la construction suivante : AG étant le double de AC, on mène les droites AE (1), GK (2) perpendiculaire à AE, EP (3) perpendiculaire à CE, KP (4) perpendiculaire à EP.

Le lieu des points P est la courbe considérée, qui a pour équation

$$y = \frac{2a^3}{a^2+x^2}.$$

Gino Loria la nomme pseudo versiera.

La pseudo versiera n'est pas la versiera, mais elle a avec cette courbe une relation très simple : ses ordonnées sont doubles de

celles de la versiera ; autrement dit, la versiera et la pseudo-versiera sont deux courbes affines, comme cela résulte de leurs équations, et aussi de la figure, car le lieu des points K est un cercle homothétique à AC et par suite on a PN = 2 PM.

L'aire de la pseudo-versiera est double de celle de la versiera, ou $2\pi a^2$.

Notes. – I. On a vu, au § Robervallienne, que la courbe

$$y = \frac{2}{1+x^2}$$

est la robervallienne du cercle de rayon 1, ou que

$$y = \frac{2a^3}{a^2+x^2}$$

est la robervallienne du cercle de rayon a. La robervallienne confondue avec la cubique d'Agnesi, n'est donc pas en réalité cette courbe, mais une courbe affine, la pseudo-versiera.

(La présente remarque dissipera toute équivoque).

II. – La courbe

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

qui, elle, est une versiera d'Agnesi, a été étudiée par Fermat qui en a fait connaître la quadrature.

Elle a été aussi mentionnée à diverses reprises dans les Annales de Gergonne, à l'occasion de sa quadrature partielle (au moyen de la fonction, arc tang x) et du problème de la détermination d'un arc dont la tangente est donnée (Kramp, t. VI, pp. 289-290, 293-294 ; Gergonne, t. VI, pp. 305-307 ; Bérard, t. VII, pp. 114-115 ; Kramp, t. VII, pp. 246-252 et t. IX).

III. – Le problème de la détermination de la podaire de la courbe

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

par rapport au sommet a été proposé et résolu dans Mathesis, 1883, p. 24, quest. 209 ; solution, 1888, pp. 167-169. H. Brocard.

IV. – Pour d'autres références bibliographiques sur les courbes susmentionnées, voir :

Mister. Propriétés de la courbe d'Agnesi (M. t. VII, p. 1, 1887).

E.-N. Barisien (I. M. 1894, p. 153).

D'Arcais, G. Peano, A. Rebière (I. M. 1895, p. 83).

Vivianienne. – Dénomination abréviative de la courbe de Viviani ou de la courbe qui se rencontre dans le Problème de Viviani ou Problème de la voûte quarrable.

Voici à ce sujet ce que l'on trouve dans l'Histoire de l'Académie des Sciences pour 1703:
« En 1692, il (Viviani) proposa, dans les Actes de Leipsic, un problême qui consistoit à trouver l'art de percer une voûte hémisphérique de quatre fenêtres, telles que le reste de la voûte fût absolument quarrable. Le problême venoit

A D Pio Lisci pusillo Geometra,

qui étoit l'anagramme de

Postremo Galilaei Discipulo,

et il marquoit que l'on attendoit cette solution de la Science secrete des illustres Analistes du tems.

« Le problême de la voûte quarrable faisoit partie d'un Ouvrage que M. Viviani donna la même année 1692, intitulé: La Struttura et Quadratura esatta dell' intero e delle parti d'un nuovo Cielo ammirable, ed uno degli antichi, delle volte regolari degli Architetti. »

(Eloge de M. Viviani, pp. 137–148).

Voici comment le problème était énoncé:
« Quaeritur forma Templi hemisphaerici, sed quatuor aequalibus ac similibus, similiterque positis fenestris ita interrupti, ut his detractis reliquam hemisphaericae superficiei sit absolute quadrabile. »

Il se trouve dans l'écrit suivant de Leibniz [qui en avait donné la solution le jour même qu'il avait reçu le problème (27 mai 1692)]:

« AEnigma architectonico-geometricum Florentia transmissum ad G. G. L. atque ab hoc cum solutione remissum ad magnum principem Hetruriae. »

(Leibniz, Math. Schriften, t. V, p. 274; Halle, 1858)

Le problème est résolu par l'intersection de la sphère avec un cylindre droit ayant pour base la courbe du 4e degré, appelée quelquefois lemniscate de Gerono, que Montferrier paraît avoir confondue avec la lemniscate ordinaire, et qui a pour équation

$$a^2 y^2 = (a^2 - x^2) x^2.$$

C'est la courbe à laquelle Aubry (J. S,

1895, pp. 266-267) a proposé de donner le nom de huit, rappelant la forme du chiffre 8.

Voir I. M. 1897, pp. 98 et 190-191; et 1898, p. 105.

Voir les articles : Fenêtre de Viviani, Huit, Lemniscate de Gerono, Vivianienne.

On a conjecturé aussi que la voûte quarrable de Viviani pourrait bien avoir été connue ou étudiée des anciens, sous le nom de paradoxos de Menelaos. Voir : P. Tannery. Pour l'histoire des lignes et surfaces courbes dans l'antiquité. B. D. 1883, pp. 278-291.

Voûte de Poinsot.

Nom donné à la courbe d'équilibre de voussoirs sphériques juxtaposés, sans frottement.

Stirling a démontré et l'abbé Bossut a vérifié par l'expérience que des sphères massives de même rayon et de même poids se soutiennent en équilibre lorsque leurs centres sont sur une chaînette renversée à axe vertical et disposée dans un plan vertical (ou très légèrement incliné pour la facilité de l'expérience. Les sphères, en effet, doivent être, au préalable, disposées sur un plan horizontal qu'on amène ensuite à être presque vertical).

Voici comment Stirling a démontré cette propriété.

Construisons les parallélogrammes dont trois côtés sont la ligne des centres de deux sphères

juxtaposées et les deux rayons verticaux. Nous aurons ainsi les parallélogrammes ABGD, BERG, EHJR,....

Prolongeons les côtés GD, GR, RJ,... jusqu'à leurs rencontres avec les lignes des centres immédiatement voisines BE, EH, HM,... Nous obtenons ainsi les points F, K, N, ...

Cela posé, si l'on représente par le rayon vertical le poids de chaque sphère, celui-ci, pour la sphère A, se décompose en deux réactions AC, AI, égales entre elles. De même, BF, réaction de la sphère E, se décompose en BG (poids de la sphère B) et en FG = AC, pression de A sur B, et ainsi de suite.

On a ainsi

$$CS = FX = KZ = NQ = \cdots$$

et d'autre part

$$AS = \tfrac{1}{2} AD = GX,$$
$$RY = \tfrac{3}{2} AD.$$
$$EZ = \tfrac{5}{2} AD.$$
$$HQ = \tfrac{7}{2} AD.$$
$$\cdots \quad \cdots$$

P étant la projection de M sur HQ, on a

$$\text{tang } HMP = \frac{HP}{MP} = \frac{HQ}{NQ} = \frac{7AD}{2NQ}.$$

Mais 2NQ est une constante a, et 7AD est la somme des diamètres des sphères A, B, E, H,...

Si le rayon des sphères vient à diminuer, à la limite on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{a},$$

relation sous laquelle on reconnaît l'équation différentielle de la chaînette.

Annexes.

Les Annexes qui suivent sont destinées fournir au Lecteur les renseignements qui ont été jugés devoir être insérés en dehors du texte du Répertoire des Courbes.

Nous en avons profité pour combler diverses lacunes et réparer quelques omissions.

Annexe I.

Comme sujet de cette première Annexe nous avons choisi le Tableau des nombres de Plücker ou Caractéristiques pluckériennes de diverses courbes planes parmi les plus intéressantes étudiées ou mentionnées au Répertoire.

Les notations adoptées dans un premier article (voir: Courbe algébrique, Supplément, pp. VIII-X) avaient été empruntées aux Nouvelles Annales, mais il nous a paru préférable de leur substituer les notations de l'ouvrage de G. Salmon (Courbes planes, 1884) où les lettres m, n continuant à désigner le degré et la classe, les lettres grecques $\varkappa, \upsilon, \delta, \tau$, ont remplacé les lettres r, i, d, t, et désignent, par conséquent, les nombres de rebroussements (ou mieux de points stationnaires), d'inflexions (ou mieux de tangentes stationnaires), de points doubles et de tangentes doubles.

Voici ces nombres pour quelques courbes.

Numeros d'ordre	Dénominations des Courbes
I	Ovale de Descartes
II	Sa développée
III	Quartique bicirculaire de la 8e classe
IV	Sa développée
V	Toroïde
VI	Cubique circulaire unicursale
VII	Sa développée
VIII	Cubique circulaire de la 6e classe
IX	Sa développée
X	Développée de conique à centre
XI	Astroïde
XII	Kreuzcurve
XIII	Inverse ou podaire de conique à centre
XIV	Lemniscate de Bernoulli
XV	Limaçon de Pascal
XVI	Sa développée
XVII	Cardioïde
XVIII	Sa développée
XIX	Développée de l'inverse de conique à centre
XX	Inverse de parabole
XXI	Sa développée

Numeros d'ordre	Nombres de Plücker					
	m	n	$\varkappa$	ι	δ	τ
I	4	6	2	8	0	1
II	12	6	18	0	36	9
III	4	8	0	12	2	8
IV	12	8	16	4	38	16
V	8	4	12	0	8	2
VI	3	4	0	3	1	0
VII	6	5	5	2	5	4
VIII	3	6	0	9	0	0
IX	12	7	17	2	37	12
X, XI	6	4	6	0	4	3
XII, XIII, XIV	4	6	0	6	3	4
XV	4	4	2	2	1	1
XVI	6	4	6	0	4	3
XVII, XVIII	4	3	3	0	0	1
XIX	6	6	4	4	6	6
XX, XXI	4	5	1	4	2	2

Ces nombres vérifient les relations suivantes, dites formules de Plücker :

$$n = m(m-1) - 2\delta - 3\varkappa,$$
$$\iota = 3m(m-2) - 6\delta - 8\varkappa,$$

et les corrélatives :

$$m = n(n-1) - 2\tau - 3\iota,$$
$$\varkappa = 3n(n-2) - 6\tau - 8\iota,$$

ainsi que la relation

$$3(m-n) = \varkappa - \iota.$$

Voir G. Salmon. Courbes planes.

On trouvera, dans le même Ouvrage (p. 302) le tableau des nombres de Plücker pour les dix classes de quartiques.

Annexe II.

D'autres relations non moins importantes dans l'étude des courbes sont celles qui ont été établies entre la longueur de l'arc s d'une courbe, considérée comme abscisse, et la longueur du rayon de courbure ρ au point correspondant, considérée comme ordonnée.

Ces deux éléments définissent des coordonnées absolues, auxquelles on a donné le nom de coordonnées intrinsèques.

La relation entre ces deux coordonnées a reçu le nom d'équation intrinsèque.

Nous transcrivons ci-inclus les équations intrinsèques de diverses courbes d'après la Geometria intrinseca d'E. Cesaro (Naples, 1896).

Point $\qquad \rho = 0.$

Cercle $\qquad \rho = a.$

Ellipse $\qquad s = \frac{1}{3}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{b\rho}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]\left[\left(\frac{a\rho}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}}-1\right]}}$

Parabole $s = \frac{1}{3}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}}$

Hyperbole équilatère $s = \frac{1}{3}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{4}{3}} - 1}}$

Chaînette $\rho = a + \frac{s^2}{a}$

Pseudo chaînette $\rho = K^2 a - \frac{s^2}{a}$.

Alysoïde $\rho = a + \frac{s^2}{b}$.

Chaînette d'égale résistance $\rho = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right)$.

Tractrice $\rho = a\sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1}$

Pseudo tractrice $\rho = a\sqrt{1 - e^{-\frac{2s}{a}}}$

Cycloïde $s^2 + \rho^2 = a^2$.

Pseudo cycloïde $s^2 - \rho^2 = \pm a^2$.

Lemniscate $s = 3\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{c}\right)^4 - 1}}$ $\left(c = \frac{a}{3}\sqrt{2}\right)$

Spirale sinusoïde $s = \frac{n+1}{n-1}\int \frac{d\rho}{\sqrt{(n+1)\left(\frac{\rho}{c}\right)^{\frac{2n}{n-1}} + \frac{R^2}{c^2}\left(\frac{\rho}{c}\right)^{2\frac{n+1}{n-1}} - 1}}$

Ligne de Ribaucour $s = \frac{n+1}{n-1}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2\frac{n+1}{n-1}} - 1}}$

Clothoïde $\rho s = a^2$.

Spirale logarithmique $\rho = as$.

Développante de cercle $\rho^2 = 2as$.

Hypocycloïde tricuspide $\rho^2 + 9s^2 = K^2$.

Astroïde $\rho^2 + 4s^2 = K^2$.

Epicycloïde $\frac{s^2}{a^2} + \frac{\rho^2}{b^2} = 1.$

Courbe de Delaunay $\rho = a \frac{1+K^2 - 2K\cos\frac{s}{a}}{K(K-\cos\frac{s}{a})}$ $(K=\frac{c}{a})$

Voir aussi, du même auteur, N. A. Remarques sur la théorie des roulettes. 1888, pp. 209-230 et M. Étude intrinsèque des coniques et des cassinoïdes. 1891, pp. 51-62.

Annexe III

Dans un article du Journal Les Mondes, du 25 août 1877 (n° 17) J. Plateau a fait connaître quelques exemples curieux de discontinuité en Analyse.

Voici trois courbes qu'il cite, composées d'arcs limités à des points d'arrêt.

$$y = \cos\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$y = (x+b)\cos\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$y = m\cos\sqrt{a-x} \pm n(a-x)x^{\frac{3}{2}}$$

A ce sujet, P. Mansion a ajouté la remarque suivante : Si dans l'équation d'une courbe qui

présente un point multiple correspondant à l'abscisse $x = a$ on remplace y par $y - \cos\sqrt{a-x}$, on transformera en général ce point multiple en un point saillant auquel pourront correspondre autant de tangentes qu'il y avait de branches passant par le point multiple dans la courbe primitive.

L'équation

$$y^2 = (a-x)(a \pm \sqrt{ax})$$

devient

$$(y - \cos\sqrt{a-x})^2 = (a-x)(a \pm \sqrt{ax}).$$

L'équation

$$x = y^2(1 \pm \sqrt{1-y})$$

se transforme en la suivante :

$$x = (y - \cos\sqrt{x})^2(1 \pm \sqrt{1 - y + \cos\sqrt{x}}).$$

La courbe qui lui correspond présente un point de dédoublement.

L'équation

$$x = m(y - \cos\sqrt{x})^2\left[(1 + y - \cos\sqrt{x})^3 \pm \left(1 + [y - \cos\sqrt{x}]^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$(m = 0{,}005)$ correspond à une courbe qui présente un point de dédoublement à l'origine, mais d'où partent trois branches paraboliques, deux au-dessus de Ox, la troisième au-dessous.

C'est un specimen de courbe à aiguillage.

Nous signalerons enfin, du même article, la courbe représentée par l'équation

$$y = x \pm m(b-x)(a-x)^{\frac{3}{2}} \pm n(b-x)^{\frac{3}{2}}$$

et qui a la forme figurée ci-contre.

$(m = 0.5,$
$n = 0.1$
$a = 5$
$b = 4.$

Voir M. 1883, 193-196 ; 1884, 164.

Annexe IV

Équations caractéristiques.

L'élimination des constantes qui entrent dans l'équation d'une famille de courbes conduit à une équation différentielle exprimant une propriété caractéristique commune à toutes ces courbes. Cette équation a reçu le nom d'équation caractéristique. Son interprétation géométrique est connue et assez simple pour la plupart des courbes le plus fréquemment rencontrées dans les applications, mais il y aura intérêt à rappeler ici quelques résultats ou à en signaler d'autres probablement inédits.

Cercle. De l'équation du cercle

$$x^2+y^2=a^2$$

on déduit l'équation différentielle

$$x+yy'=0$$

qui exprime que les normales passent par l'origine, centre du cercle.

Parabole du second degré. On a

$$y^2=2px$$

d'où

$$\frac{y}{y'}=2x$$

équation qui exprime que la sous tangente $\frac{y}{y'}$ est double de l'abscisse x.

Développante de cercle. – Cette courbe a pour équation différentielle

$$(x+yy')^2=a^2(1+y'^2).$$

Elle exprime que la distance de l'origine aux normales à la courbe est constante et égale à a.

Cette propriété est caractéristique, mais l'équation caractéristique exprimerait une propriété moins simple, relative à la courbure.

Ellipse rapportée à ses axes. – On a

$$y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2,$$

d'où, par élimination de a et b,

$$xyy''+xy'^2-yy'=0$$

Cette équation est la traduction de la propriété géométrique suivante :

Le centre de courbure se trouve sur la parallèle au petit axe menée par l'intersection du diamètre aboutissant au point donné avec la parallèle à la tangente menée par le pied de la normale sur l'axe focal.

Développée de l'ellipse. – On a l'équation

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$$

ou

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

L'équation caractéristique est alors

$$yy' - xy'^2 + 3xyy'' = 0.$$

Elle exprime la propriété suivante :

La projection du rayon de courbure sur Ox est égale, et de sens contraire, à trois fois la différence entre l'abscisse du point considéré M et l'abscisse d'un certain point D, intersection de la normale en M avec une droite menée de l'origine au point de rencontre de l'ordonnée de M par la perpendiculaire élevée sur la tangente au point où celle-ci coupe l'axe des x. (Théorème de Mac-Laurin).

Exponentielle. – On a

$$y = ae^{\frac{x}{a}}$$

d'où

$$\frac{y}{y'} = 1.$$

La sous tangente est constante.

Logarithmique. Propriété analogue à celle de l'exponentielle.

Cycloïde. L'équation différentielle

$$y' = \sqrt{\frac{2a-y}{y}}$$

ou

$$\frac{1+y'^2}{y''} = -2y$$

exprime que le rayon de courbure est double de la normale arrêtée à l'axe des x :

$$\frac{(1+y'^2)\sqrt{1+y'^2}}{y''} = -2y\sqrt{1+y'^2}$$

Chainette. L'équation différentielle

$$y'^2 = \frac{y^2}{a^2} - 1$$

ou

$$\frac{1+y'^2}{y''} = y$$

exprime que le rayon de courbure est égal à la normale terminée à l'axe des x, mais dirigé en sens contraire.

Tractrice. — L'équation différentielle

$$\frac{y\sqrt{1+y'^2}}{y'} = a$$

exprime que la tangente est de longueur constante et égale à a.

On peut l'écrire

$$\frac{y'(1+y'^2)}{y''} = \frac{y}{y'},$$

ce qui exprime que la projection du rayon de courbure sur l'axe des x coïncide avec la sous-tangente.

Courbe dont la normale en M passe par l'intersection de Ox avec la perpendiculaire au rayon vecteur OM menée du point de Oy ayant même ordonnée que M.

L'équation différentielle de la courbe est

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{xy}.$$

La substitution $y = ux$ donne l'intégrale

$$y^2 = 2x^2 \, l \frac{a}{x}.$$

La courbe, comprise entre 0 et a, a la forme d'un folium simple. On a $y' = 0$ au point $x = \frac{a}{\sqrt{e}} = 0.6065 \times a$. En ce point B, le rayon OB est à 45° sur Ox.

Courbe dont la tangente en M passe par le point d'intersection de Ox avec la perpendiculaire au rayon vecteur menée du point de Oy ayant une ordonnée double de celle de M.

L'équation différentielle de la courbe est

$$y' = \frac{xy}{x^2 - 2y^2}.$$

La substitution $y = ux$ donne l'intégrale

$$x^2 = 2y^2 \, l \frac{a^2}{y^2}.$$

Note. — A ce sujet et pour des questions analogues, voir *M.* 1882, Interprétation de l'équation caractéristique de diverses courbes, pp. 25-30 et 49-51; El Progreso matemático, 1893, t. III, p. 32-33.

Il serait d'ailleurs aisé d'y ajouter d'autres exemples.

Modifications
et
Additions

Quelques détails ont encore échappé au classement des matériaux de ce Répertoire. Je me propose de les réunir ci-après sous forme de Suppléments.

Dans le présent travail, j'ai eu surtout en vue la description géométrique des courbes considérées. C'est pourquoi je n'ai pas jugé devoir exposer l'histoire particulière des diverses courbes, mais les indications bibliographiques mentionnées à leur sujet donneront le moyen de remonter aux origines.

Ier Supplément.

Arbelos d'Archimède. — Pour l'histoire et l'étude géométrique de cette figure, voir I. M. 1897, pp. 279-281.

Aranea. — Voir le § relatif à l'Epicycloïde.

Cappa. — Cette courbe intervient fréquemment dans les applications, et sa bibliographie complète exigerait une grande étendue.

Voici quelques propriétés à ajouter à celles qui ont été déjà mentionnées :

Soit donné un cercle de centre C :

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

On considère les coniques qui, passant par les points A et A' du cercle situés sur Cx, sont tangentes en B au cercle et ont leur centre sur la parallèle à Cx menée par B.

Le lieu des centres de ces coniques a pour équation

$$(x^2 - y^2)^2 (a^2 - y^2) = x^2 (a^2 - 2y^2)^2,$$

qui se décompose en deux facteurs :

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

$$y^2 (x^2 + y^2) - a^2 x^2 = 0.$$

La première représente le cercle donné ; la seconde, un cappa. (E. N. Barisien).

L'aire du cappa a pour expression πa^2.

On peut observer aussi que le cappa dérive de la strophoïde droite en retranchant du rayon vecteur de la strophoïde

$$r = \frac{a(1 - \sin\theta)}{\cos\theta}$$

celui de la droite asymptote

$$r = \frac{a}{\cos\theta}.$$

(E. N. Barisien).

Cercle circonscrit. — Entre les lignes « Dans le système de coordonnées barycentriques » et « le centre a pour coordonnées »

le lecteur est prié d'ajouter
« le cercle circonscrit a pour équation
$a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta = 0$. »

Cercles de Chasles. – Voir M. 1898, pp. 61–66, H. Brocard : Propriétés des cercles de Chasles ; Étude bibliographique.

Cercles de Neuberg. – Aux définitions déjà données, on peut ajouter que les cercles de Neuberg sont les trois cercles passant respectivement par les sommets d'un triangle et ayant leurs centres aux points de rencontre des médiatrices avec les céviennes du point de Tarry (Voir Cercle circonscrit).

Cercle des neuf points. – Il paraît utile de doubler ce titre et de l'écrire ainsi :

Cercle des neuf points (ou cercle d'Euler).

Cercle isotomique. – Supprimer les trois dernières lignes du § relatif à ce cercle.

Circonférence. – On pourra compléter ce § par les lignes suivantes :

L'incommensurabilité du nombre π a été démontrée par Lambert en 1761 (Voir : Legendre, Éléments de Géométrie, Note IV).

L'impossibilité de la quadrature du cercle a été démontrée en 1882 par Lindemann, en s'appuyant sur des formules dues à Hermite (Voir : Rouché et de Comberousse, Traité de Géométrie, Tome I, Note II. pp. 421–428 ; 1891).

Cissoïde. – Au § cité des Œuvres de Fermat, il est dit que les quatre lignes AO, ON, OB, OM sont continuement proportionnelles, et de même les quatre lignes AP, PQ, PB, PR.

En outre, l'espace GRBDF est triple du cercle générateur ACBD.

Dans le même ouvrage t. II, p. 201, au sujet d'une lettre de Roberval à Fermat du 4 août 1640, il est dit, en note :

« Roberval semble avoir considéré la cissoïde comme comprenant la courbe symétrique que l'on obtient en–

changeant le signe de x dans l'équation

$$y^2(a-x)=(a+x)^3.$$

Il est probable que les anciens entendaient également dans le même sens leur définition de cette courbe, mais, pas plus que pour la quadratrice, ils n'avaient considéré les branches en dehors du cercle

$$x^2+y^2=a^2.$$ »

Cette remarque a sa place naturelle dans l'histoire des lignes courbes, car il a été reconnu que la forme primitive assignée à la strophoïde, comportait pareillement une courbe symétrique (Voir, Strophoïde).

Conique conjuguée. – Comme exemples de coniques conjuguées à un triangle, on peut citer, en coordonnées barycentriques 1° la conique

$$(b^2-c^2)\alpha^2+(c^2-a^2)\beta^2+(a^2-b^2)\gamma^2=0$$

anticomplémentaire de l'hyperbole de Kiepert; son centre est le point de Steiner; elle passe par le barycentre G et ses trois adjoints, le centre I du cercle inscrit et ses trois adjoints; le point $\sqrt{\frac{\cos A}{a}}$, ... et ses trois adjoints, etc.

2° la conique

$$\frac{\alpha^2}{b^2-c^2}+\frac{\beta^2}{c^2-a^2}+\frac{\gamma^2}{a^2-b^2}=0$$

complémentaire de la parabole de Kiepert. Cette parabole est tangente aux trois pédales du barycentre, etc.

Voir L. Ripert : I. M. 1898, pp. 149-150, 1899, p. 43 ; M, 1899, pp. 63-64.

Conique de n points. – Les trois sommets d'un triangle et l'orthocentre forment un groupe orthocentrique (c'est-à-dire dans lequel chaque point est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres). La conique des neuf points devient alors le cercle des neuf points (ou cercle d'Euler). (Voir ce mot).

Si l'un des quatre sommets (D) d'un quadrilatère est le barycentre du triangle (ABC) formé par les trois autres, la conique des neuf points de ABCD devient celle des deux ellipses de Steiner qui est inscrite au triangle ABC (Voir Ellipse de Steiner).

Conique homoponctuelle. – Les coniques homoponctuelles (à une conique donnée) sont

celles qui passent par deux points donnés (réels ou imaginaires conjugués) sur cette conique ; ces points sont dits fondamentaux et leur droite de jonction est dite fondamentale.

Si cette droite est celle de l'infini, les coniques homoponctuelles deviennent homothétiques (voir ce mot) ; si, en outre, les points fondamentaux sont les points cycliques du plan, les coniques sont des cercles.

L'équation générale des coniques homoponctuelles ne contient que trois paramètres ; chacune d'elles est déterminée par trois conditions.

La considération des coniques homoponctuelles est nécessaire pour l'application générale du principe d'homographie aux propriétés descriptives et métriques du plan (Voir : N. A. 1898, pp. 446-461 ; 1899, pp. 101-121, L. Ripert).

<u>Conique homotangente</u>. — Les coniques homotangentes (à une conique donnée) sont celles qui touchent deux tangentes données (réelles ou imaginaires conjuguées) à cette conique ; ces droites sont dites fondamentales et leur point d'intersection est dit point fondamental.

Les coniques homotangentes sont les corrélatives des coniques homoponctuelles (Voir ce mot) ; elles deviennent spécialement corrélatives des coniques homothétiques (voir ce mot) lorsque le point fondamental est corrélatif de la droite de l'infini.

Ce point étant pris pour origine des coordonnées (cartésiennes) et l'équation tangentielle de la conique donnée étant

$$AU^2 + 2BUV + CV^2 + \dots = 0,$$

l'équation générale des coniques homotangentes est

$$AU^2 + 2BUV + CV^2 + 2\lambda UR + 2\mu VR + \nu R^2 = 0.$$

Une conique homotangente est donc déterminée par trois conditions.

Note. — Le rôle et la bibliographie de ces coniques sont les mêmes que pour les coniques homoponctuelles.

<u>Conique homothétique</u>. — Les coniques homothétiques sont celles qui coupent la droite de l'infini aux deux mêmes points (réels

ou imaginaires conjugués); elles sont donc un cas particulier des coniques homoponctuelles (Voir ce mot).

L'équation cartésienne d'une conique étant

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \dots = 0,$$

l'équation générale des coniques qui lui sont homothétiques est

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2\lambda x + 2\mu y + \nu = 0.$$

Deux ellipses homothétiques sont toujours semblables et semblablement placées.

Deux hyperboles peuvent être homothétiques sans être ni semblables ni semblablement placées : il suffit que leurs asymptotes soient parallèles. Ainsi, les deux hyperboles

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

sont homothétiques, car elles coupent la droite de l'infini ($t = 0$) aux mêmes points ($t = 0$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$).

Les coniques homothétiques (et plus généralement les coniques homoponctuelles) sont des transformées homographiques des cercles, dont toutes les propriétés descriptives et même métriques peuvent leur être étendues. Voir N. A. 1898, pp. 446-461 : L. Ripert : Sur l'application du principe de dualité aux théorèmes de Géométrie plane ; 1899, pp. 101-121 ; L. Ripert : Sur l'homographie et la dualité appliquées aux propriétés métriques du plan.

<u>Conique</u> (I). – En réalité, la conique ainsi désignée n'est autre que l'ellipse de Longchamps (Voir ce mot).

La conique (I) est la conique centralement associée au point I, centre du cercle inscrit au triangle de référence.

Pour d'autres coniques centralement associées (au point G) voir Ellipse de Steiner.

<u>Courbe aux trois foyers</u>. – Courbe proposée par Monge et définie par les conditions

$$FM + F'M = 2a,$$
$$FM + F''M = 2b.$$

(Voir M. 1896, pp. 112-113).

Les trois foyers F, F', F'' sont quelconques dans le plan et le point M est supposé en dehors du plan.

La détermination de cette courbe a fait l'objet d'une assez longue controverse, jusqu'à ce que le Dr. Reiss fît voir (Correspondance mathématique t. VII, 1832) que la courbe (M) est plane.

<u>Courbe bitangentielle</u>. — Aux références de G. Salmon, ajouter : p. 475.

<u>Courbe asymptote</u>. — De nombreux exemples pourraient être cités de courbes asymptotes à diverses courbes. C'est ainsi que la chaînette est asymptote à deux exponentielles ; que la circonférence est asymptote à la pseudo-tractrice et à des spirales particulières.

Il existe aussi des paraboles asymptotes à certaines courbes.

Au surplus, il est toujours possible de déterminer aisément l'équation d'une nouvelle courbe asymptote à une courbe proposée.

<u>Courbe autopolaire</u>. — Pour une étude sur les courbes qui peuvent coïncider avec leurs courbes polaires réciproques par rapport à une conique à choisir à volonté, voir F. J. van den Berg (Congrès d'Utrecht, 1891) Sur des courbes planes autopolaires (pp. 130–134).

<u>Courbe de classe n</u>. — Courbe algébrique dont l'équation tangentielle est de degré n.

La classe n d'une courbe est invariable ; elle est le nombre de tangentes (réelles ou imaginaires) que l'on peut mener à la courbe par un point arbitraire du plan.

Dans l'espace, la classe d'une courbe reste le degré de son équation tangentielle ; elle exprime le nombre de plans tangents que l'on peut mener à la courbe par une droite arbitraire.

<u>Courbe d'ordre m</u>. — Remplacer les deux premières lignes par les suivantes : « Courbe algébrique dont l'équation ponctuelle est de degré m. »

<u>Courbes de Lissajous</u>. – Courbes plus habituellement désignées sous la dénomination de Figures de Lissajous. Voir ce mot.

<u>Courbe imaginaire</u>. – Il paraît utile d'observer que les courbes imaginaires sont de deux espèces :

1° Courbes imaginaires de 1e espèce, représentées par une équation algébrique à coefficients réels, et ne pouvant cependant avoir aucun point réel.

2°, Courbes imaginaires de 2e espèce, représentées par une équation algébrique à coefficients imaginaires, et pouvant avoir ou non des points réels, mais ne formant pas lieu géométrique.

Comme exemple de ces dernières courbes, on peut donner celui de conique imaginaire

$$F(x.y) = f(x.y) + i\varphi(x.y).$$

f et φ désignant des fonctions du second degré. Cette conique imaginaire de 2e espèce passe par les points communs à $f = 0$ et $\varphi = 0$, qui peuvent être aussi bien imaginaires que réels.

<u>Courbe merveilleuse</u>. – Qualification que Cremona a proposé de donner à l'hypocycloïde à trois rebroussements, en considération du rôle important de cette courbe dans la Géométrie.

Voir J. S. 1884, p. 169 et M. 1888, p. 5.

<u>Courbe moyenne</u>. – Courbe dont une coordonnée est la moyenne entre les coordonnées correspondantes de deux courbes.

Exemples :

Chaînette : $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{1}{2}\left(ae^{\frac{x}{a}} + ae^{-\frac{x}{a}}\right).$

Courbes de Bérard : $y = \frac{1}{2}\left(y_{E_1} + y_{E_2}\right)$

E_1 et E_2 étant deux ellipses ayant Ox pour axe focal.

Syntractrice : $x = \frac{1}{2}\left(x_C + x_T\right),$

C désignant un cercle et T une tractrice.

Voir S. M. t. XIII, 1884-1885, pp. 71-83 ;

M. d'Ocagne : sur les isométriques d'une droite par rapport à certains systèmes de courbes planes ; N. A. 1891, pp. 82-90 : M. d'Ocagne : Sur une courbe définie par la loi de sa rectification.

Courbe nodale. – Courbe nodale, d'un réseau de trois courbes, – nom donné primitivement par J. Steiner à la courbe appelée depuis Cayleyenne. Voir N. A. 1864, p. 31, Cremona.

Courbe polyzonale. – La remarque faite au sujet de la dénomination de courbe polyzomale ou polyzonale, indifféremment, est justifiée par l'indication d'un Mémoire de Cayley sur les courbes polyzonales, cité par G. Salmon (Courbes planes, 1884, p. 342)
Voir Edinburgh Transactions. 1869.

Courbe ponctuée. – La notion de ces lignes est utile à un point de vue spécial. En effet, une étude des courbes ponctuées planes donne la clef de la théorie des courbes gauches (L. Ripert).

Courbe rectiligne. – L'observation qui vient d'être faite au sujet des courbes ponctuées s'étend aux courbes rectilignes. En effet, une étude des courbes rectilignes planes donne la clef de la théorie des surfaces développables (L. Ripert).

Cubique anallagmatique. – Les deux figures accompagnant cet article, la deuxième notamment, présentaient des difficultés d'exécution qui ont nui à la précision du tracé. Le lecteur voudra bien suppléer à ce que ces figures pourraient avoir d'inexact. Dans une édition imprimée, on donnera tout le soin voulu à des épures gravées.

Cubique canonisante. – Cubique de la même famille que la cubique dont on étudie les propriétés, mais qui est représentée par l'équation de la forme la plus simple. Voir G. Salmon. Courbes planes. 1884. pp. 266 et 269.

Curva descensus æquabilis. – Quelquefois assimilée à la cycloïde, mais il est plus exact de la rapporter à la parabole

semi-cubique.
Voir Courbe isochrone.

<u>Cycloïde</u>.– L'ombre de l'hélice sur la base d'un cylindre circulaire droit est une cycloïde ordinaire, allongée ou accourcie.

Voir I. M. 1894, p. 212 et 1897, p. 56.

<u>Epicycloïde</u>.– Les normales à une épicycloïde aux points de contact des tangentes issues d'un point fixe enveloppent une conique (I. M. 1894, p. 243; 1895, p. 208).

Pour l'épicycloïde enveloppe de la droite joignant les extrémités des aiguilles d'une montre, voir I. M. 1895, p. 316.

Les nombres de Plücker pour les épicycloïdes et hypocycloïdes algébriques se trouvent déterminés dans un Mémoire d'Elling Holst : Ueber algebraische cycloidische Kurven, Archiv for Mat. og. Naturvidenskab, t. VI, 1881, p. 125 (I. M. 1894. p. 206).

<u>Figures de Lissajous</u>.– Pour diverses contributions à l'étude des courbes ou figures de Lissajous, voir :

Lissajous. Sur l'étude optique des mouvements vibratoires. Annales de Chimie et de Physique. 1857, (3) t. LI.

J. Violle.– Cours de Physique.

C. S. Slichter.– Harmonic curves of three frequencies. (Courbes acoustiques résultant de trois mouvements à angle droit et de phases différentes) (Transactions of the Wisconsin Academy, t. XI. 1896-1897, pp. 449-451).

E. H. Comstock.– The real singularities of harmonic curves of three frequencies (Ibid. pp. 452-464).

Voici quelques indications sommaires.

Les équations des courbes ou figures de Lissajous sont

$$x = \cos(rt + e_1),$$
$$y = \cos(st + e_2),$$

t désignant un paramètre, $\frac{r}{s}$ le rapport des nombres de vibrations parallèles à l'axe des x et à l'axe des y, e_1, e_2 les dif-

férences de phase.

W. Braun a étudié ces courbes au point de vue géométrique (Math. Annalen, 1875, t. VIII, pp. 567-573 et Dissertation inaugurale. Il en a déterminé le nombre de points doubles, le degré, la classe, le genre et les inflexions.

H. Comstock s'est proposé d'évaluer le nombre de points doubles des courbes définies par les trois équations

$$x = \cos nt, \quad y = \cos rt, \quad z = \cos st$$

ou par les deux premières. Il trouve

$$\frac{(n-1)(\gamma-1)}{2} + \frac{(r-1)(\delta-1)}{2} + \frac{(s-1)(\varepsilon-1)}{2}$$

$$-\frac{(\gamma-1)(\delta-1)}{2} - \frac{(\delta-1)(\varepsilon-1)}{2} - \frac{(\gamma-1)(\varepsilon-1)}{2},$$

$\left.\begin{matrix}\gamma\\ \delta\\ \varepsilon\end{matrix}\right\}$ étant les diviseurs communs à $\left\{\begin{matrix}r, s\\ n, s,\\ n, r.\end{matrix}\right.$

Lorsque n, r, s sont tous les trois des nombres premiers, il n'y a pas de points doubles.

Si $z = 0$, le nombre de points d'inflexion de la courbe (plane) est $n - r - 1$, si $n > r$, $r - n - 1$, si $r > n$.

__Folium parabolique droit.__ — En désignant OA par h, un point I de la courbe s'obtient par la construction (1.2.3.4), dans laquelle il est intéressant de remarquer les droites parallèles 2 et 4 qui ont pour enveloppes, la première, une parabole

$$y^2 = 4h(h - x)$$

ayant A pour sommet et O pour foyer; la seconde, la courbe représentée par l'équation

$$27\, y^4 = 256\, h\, (x - h)^3.$$

__Hélice cylindrique.__ — L'ombre de l'hélice sur la base d'un cylindre circulaire droit est une cycloïde ordinaire, allongée ou accourcie.

Voir I. M. 1894, p. 212 et 1897, p. 56.

__Hyperbolisme.__ — La citation bibliogra-

phique ajoutée à cet article paraît devoir être un peu modifiée, en ce sens que les cubiques représentées par l'équation

$$xy^2 + ey = cx + d$$

ne sont pas des hyperbolismes de coniques quelconques, mais seulement de parabole.

<u>Hypocycloïde à trois rebroussements.</u> — L'hypocycloïde à trois rebroussements étant une courbe essentiellement rectangulaire, son équation barycentrique (ou normale) par rapport à un triangle équilatéral doit être signalée. Elle a la forme symétrique

$$\sqrt{\frac{1}{\alpha}} + \sqrt{\frac{1}{\beta}} + \sqrt{\frac{1}{\gamma}} = 0.$$

<u>Ionoïde.</u> — Dénomination et courbe imaginées par Œkinghaus (Die Lemniskate; Archives de Grunert) pour l'étude géométrique du mouvement sur une courbe.

Par cette nouvelle notion, les représentations conformes prennent une grande extension, et les lemniscates peuvent être des courbes apparentées, en ce sens qu'elles offrent au point de vue géométrique, une abondante moisson de propriétés nouvelles et qu'elles se soumettent d'une façon encore plus profonde aux principes de la théorie des analogies isogonales.

En plus de ces courbes, l'auteur propose un nouveau système de lignes courbes qui, sous le nom d'ionoïdes, sont comme une espèce de courbes de vitesses qui ont une analogie avec l'hodographe de Hamilton et qui donnent la plus élégante interprétation des circonstances du mouvement par une courbe associée.

<u>Jante.</u> — Partie circulaire d'une roue de brouette ou de voiture, ou d'une poulie, etc.

<u>Ligne de striction.</u> — Pour l'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

les lignes de striction sont deux courbes gauches du 6e ordre, faisant partie de l'intersection de l'hyperboloïde et du cône

$$a^6(b^2+c^2)^2 y^2 z^2 + b^6(c^2+a^2) z^2 x^2 - c^6(a^2-b^2)^2 x^2 y^2 = 0$$

L'intersection de ces deux surfaces est une courbe du 8e ordre, mais les lignes de striction cherchées sont des courbes du 6e ordre ayant pour seconde équation

$$\frac{y}{b}\left[\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)+\frac{z^2}{c^2}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\right] \pm \frac{2x}{ca}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)=0.$$

courbes qui sont bien situées sur le cône, mais qui ne sont qu'une partie de son intersection par l'hyperboloïde, cette intersection totale se complétant par deux droites.

Pour le paraboloïde hyperbolique

$$\frac{y^2}{p^2}-\frac{z^2}{q^2}=2x,$$

les lignes de striction sont deux paraboles, intersections du paraboloïde et des deux plans

$$\frac{y}{p^3} \pm \frac{z}{q^3} = 0$$

(p. 130, on a écrit par erreur $\sqrt{p^3}$ et $\sqrt{q^3}$).

Pour la bibliographie, voir un Mémoire de M. Chasles (Correspondance de Quetelet, t. XI, p. 50) et la Géométrie à trois dimensions de G. Salmon (2e P^ie Ch. XIII, p. 257).

La détermination des lignes de striction est extrêmement compliquée lorsqu'elle s'appuie seulement sur la notion du point central, mais elle se simplifie beaucoup en tenant compte de la propriété du plan tangent en ce point, d'être perpendiculaire au plan tangent à la surface en son point à l'infini sur la génératrice considérée.

<u>Ligne isoptique</u> et <u>Ligne orthoptique</u>

XIV. — Deux cercles.

V et T sont des limaçons de Pascal si les deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre. Ce sont des cardioïdes si les deux cercles se coupent. Les points de rebroussement de ces 2 cardioïdes sont les deux points d'intersection des deux cercles.

<u>Limaçon de Pascal</u>. — Si deux coniques de forme invariable se déplacent de manière que leurs quatre axes restent respectivement tangents à quatre cercles, et de manière que les points d'intersection des deux coniques soient sur un cercle, le

lieu des centres de ce cercle se compose de deux limaçons de Pascal. (N. A. 1869, quest. 911, p. 178. G. Darboux, et pp. 32-37).

Limbe. — Circonférence ou contour d'un disque circulaire portant une division en degrés ou fractions de degré.

Logarithmique. — La logarithmique est le profil théorique d'une sonde ou d'un câble d'égal résistance; mais, dans la pratique, on lui substitue un profil conique. Voir la Grande Encyclopédie au mot Câble.

Parabole solide. — Rétablir ainsi la fin de ce §:

« La dénomination de parabole solide a, d'ailleurs, cessé d'être employée. »

Quadrant. — Voir M. 1890, p. 62, quest. 384, E. Cesaro.

Les mathématiciens ne pourraient-ils se mettre d'accord pour faire un choix définitif parmi les façons d'écrire ce mot?

Spirale algébrique. — Pour le tracé et les propriétés d'un système de triangles disposés en spirale, voir I. M. 1896, p. 28. E. N. Barisien et E. M. Lémeray.

Cette remarque pourrait d'ailleurs aussi bien s'appliquer au § relatif à la Ligne brisée transcendante.

2e Supplément

Courbe de double mouvement de Carpos d'Antioche. – Voir P. Tannery : Pour l'histoire des lignes et surfaces courbes dans l'Antiquité (B. D. 1883. 1e Pie pp. 278–291).

D'après P. Tannery, la courbe ainsi dénommée paraît pouvoir être identifiée avec la cycloïde.

Pseudotrochoïde. – Généralisation de la trochoïde, étudiée par E. Wölffing dans le Zeitschrift für Math. und Physik. t. XLIV, 1899, pp. 139–166.

Pour Mémoire :

toutes les dénominations qui ont échappé à l'attention de l'auteur du présent Répertoire et des collaborateurs qui ont bien voulu s'y intéresser.

Note

De nouveaux Suppléments seraient nécessaires pour compléter l'énumération des Courbes géométriques qui ont reçu des noms particuliers, mais une pareille tentative me parait d'une réalisation assez incertaine. C'est pourquoi, nonobstant des lacunes encore trop nombreuses, j'estime qu'il est superflu de chercher plus longtemps à les combler. On pourra faire une suprême tentative à ce sujet dans la rédaction d'une table des matières ou d'un Catalogue qui terminera ce Répertoire.

Table des matières des deux Répertoires et Catalogue méthodique des Courbes ayant reçu des noms particuliers.

Dans le présent Catalogue, les pages se rapportent aux deux Répertoires représentés chacun par une colonne spéciale.

Un numero d'ordre a été donné aux diverses courbes sans tenir compte des doubles emplois par suite d'attribution à une même ligne de dénominations différentes.

Une colonne intitulée Observations diverses est destinée à fournir quelques indications sommaires sur la synonymie ou sur la bibliographie ou quelques autres données de nature à faciliter les recherches.

---

n.os	Noms	1re Rép.	2e Rép.	Observations diverses
1	Abaque		1	
2	Acampte	1		
3	Aclaste	1		
4	Agnesi (courbe d', witch of)	1		V. Cubique d'Agnesi
5	Agnésienne	1		V. Cubique d'Agnesi
6	Aile			V. Strophoïde
7	Ala			V. Strophoïde
8	Alysoïde	1		
9	Ambigène	2		
10	Anacamtique	2		
11	Anaclastique	2		
12	Anallagmatique	2. II	2	
13	Anamorphose	2. II		
14	Angle	4. II	2	
15	Anguinea	3		
16	Anguinée	3		
17	Anneaux de Newton	3		
18	Anneaux de Nobili	3		
19	Anse de panier	3	3	
20	Antevoluta	4		
21	Anticaustique	4. II.		
22	Anticycloïdale	4		
23	Antignomonique	4		
24	Antiprojection	4		
25	Antistéréographique	4		
26	Apienne		3	
27	Arabesques		3	V. Entrelacs
28	Araignée			V. Epicycloïde
29	Aranea		202	V. Epicycloïde
30	Arbelos d'Archimède	II		
31	Arc-en-ciel			V. couronne
32	Arête de rebroussement	4		
33	Arguésienne	5. II.	4	
34	Armille	6		
35	Astroïde	6 III	4	
36	Atriphthaloïde	7		
37	Autopodaire		4	
38	Axe hydraulique		5	
39	— longitudinal		5	
40	Axoïde	7		

247	Courbe asymptote	66	207	
248	— attachée	66		
249	— ataptique	66		
250	— autopolaire	66	207	
251	— aux approches égales	66		
252	— aux tangentes égales	274	179	
253	— aux trois foyers		206	
254	— auxiliaire	66		
255	— ayant puissance			B.D. 1898. 2e Pie p. 207
256	— balistique			
257	— baritrope			
258	— bicursale	67		
259	— bipartie	67		
260	— bitangente	67	42	
261	— bitangentielle	67	42. 207	
262	— caractéristique	67		
263	— complémentaire	67	42	
264	— composée			V. Courbe décomposable
265	— concomitante	67		
266	— conjuguée		43	
267	— conjuguée orthogonale	X.		
268	— constante	67		
269	— continue	X.	43	
270	— convolute	67		
271	— corrélative	67	43	
272	— cotydale	67		
273	— crunodale		43	
274	— cuspidale		44	
275	— d'addition	67		
276	— d'Agnési	67		
277	— de Bertrand	67. X		
278	— de coïncidence	67		
279	— de classe n		207	
280	— décomposable	67. X		V. Courbe composée
281	— de contact	68		
282	— de Delaunay	68	44	
283	— de déplacement	68		
284	— de dérivation	68		
285	— de déviation	68. X		
286	— de direction	68	44	
287	— de double mouvement			

366	Courbe épicyclique	86	
367	— équipotentielle	86	
368	— équitangentielle	87	58
369	— évanouissante	87. X	59
370	— excentrique	87	
371	— excubo-quartique.	X	
372	— expérimentale		
373	— fermée		59
374	— focale	87	60
375	— fondamentale	87	60
376	— funiculaire	87	60
377	— gauche	87	
378	— géminée	X.	
379	— géodésique		60
380	— géographique		
381	— harmonique	88	50
382	— hermitienne	88	62
383	— hyperbolique		61
384	— hyperelliptique	88	62
385	— hypergéométrique		62
386	— imaginaire	88	62. 208
387	— intégrale	88	
388	— intertranscendante		62
389	— invariante		
390	— invariantive	88	
391	— diamétrale polaire		
392	— antidiamétrale polaire		
393	— inverse	88	63
394	— isoanémone	89	
395	— isochrone	89	64
396	— isologique		64
397	— isométrique	89	65
398	— isopérimétrique	89	65
399	— isoptique	89. XI	65
400	— isotonique	90	
401	— isolépente	90	
402	— isotropique	90. XI	
403	— lac	91. XI	
404	— limite		
405	— linéaire	91	65

H. Poincaré (*)

J. Neuberg. — Sur quelques systèmes de tiges articulées 1886. p. 32.

(*) Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste t. III. 1898.

652	Hypocissoïde			J. Neuberg (*)
653	Hypocycloïde	171		
654	— à quatre rebroussements	171	113	V. Astroïde
655	— à trois rebroussements	171. XVII	113. 212	
656	— de Steiner	172		V. Hypocycloïde à trois rebroussements
657	— triangulaire	172		V. Hypocycloïde à trois rebroussements
658	— tricuspide			V. Hypocycloïde à trois rebroussements
659	Hypotrochoïde	172		
660	Image		114	
661	— sphérique			
662	Indicatrice d'un point		114	
663	Indicatrice (Seconde).		115	
664	Indicatrice	172		
665	— sphérique	173		
666	Involuta	173		
667	Ionoïde		212	
668	Isanémone	173		
669	Isanomale	173		
670	Isoanémone	174		
671	Isobare	174		
672	Isochimène	174		
673	Isocline	174		
674	Isodyname		115	
675	Isodynamique	174		
676	Isogone	174		
677	Isogonique	174		
678	Isométrique	174		
679	Isonèphe	175		
680	Isoombre	175. XVII		
681	Isophote	175		
682	Isoscélienne	175		
683	Isopérimétrique	175		
684	Isopérimètre	175. XVII		
685	Isothère	175		
686	Isotherme	175		
687	Isothermique	175		
688	Isotrépente	176	116	
689	Jacobienne	176	116	
690	Jante		212	
	Jarret	176		

(*) Sur quelques systèmes de tiges articulées. 1886. p. 33

(*) Sur quelques systèmes de tiges articulées 1886, p. 33

(**) Annuaire de la Société météorologique de France. 1895